Ant Colony Optimization

por Fabricio Breve (2008)

Fabricio Breve

www.fabriciobreve.com

Aula Anterior

- Colônias de Formigas como Sistemas Distribuídos
- Princípios de Auto-Organização
- Formigas
- Onde Vivem
- Benefícios das Formigas
- Pragas
- Sentidos
- Lares
- Alimentação
- Vida Social
- Castas Sociais
- Monomorfismo e Polimorfismo
- Papéis das Operárias
- Ciclo de Vida
- Colônias
- Formigas Urbanas
- Comunicação
- Feromônios Iniciadores
- Feromônio de Recrutamento
- Menor Caminho
- Resultados de Experimentos

Agenda

- Motivações
- Recrutamento
- Experimento com Formigas Argentinas
- Modelos de Formigas Artificiais
- Algoritmos de Ant Colony Optimization
- Algoritmo ACO Simples
- Feromônio Artificial
- Movimentação das Formigas
- Lista de Nós já Visitados
- Depósito de Feromônio
- Reforço Positivo
- Depósito de Feromônio no Retorno à Origem
- Evaporação de Feromônio
- ACO Simples: um exemplo
- Algoritmo para o ACO Simples
- Exemplo
- Exercício
- Algoritmo ACO de propósito geral
- Construção/modificação de soluções paralelas
- Atualização de trilhas de feromônio
- Comportamento do ACO
- Problema do Caixeiro Viajante (TSP)
- ACO aplicado ao TSP
- Transição entre Cidades
- Probabilidades de Visitar cada Cidade
- Feromônio Depositado nas Arestas
- Regra de Atualização de Feromônio
- Quantas Formigas?
- Formigas Elitistas
- Parâmetros no ACO aplicado ao TSP
- Outras Melhorias do ACO
- TSP com 8 Cidades e 8 Formigas
- TSP com 70 Cidades e 70 Formigas
- Outras aplicações de ACO
- Aplicações de ACO
- Simuladores Interessantes

Ant Colony Optimization

- Origem na tese de doutorado de Marco Dorigo, em 1992.
  - Ant Systems
    - Algoritmo baseado em colônia de formigas.
  - Aprimorado posteriormente por outros pesquisadores e pelo próprio Dorigo.
    - Motivou o desenvolvimento de uma nova meta-heurística de otimização baseada em colônias de formigas.
      - Unificando as diferentes abordagens propostas.

Marco Dorigo é um cientista da computação italiano, que trabalha com inteligência artificial. É diretor de pesquisa do Fundo Belga para Pesquisa Científica e codiretor do IRIDIA, o laboratório de inteligência artificial da Université Libre de Bruxelles.

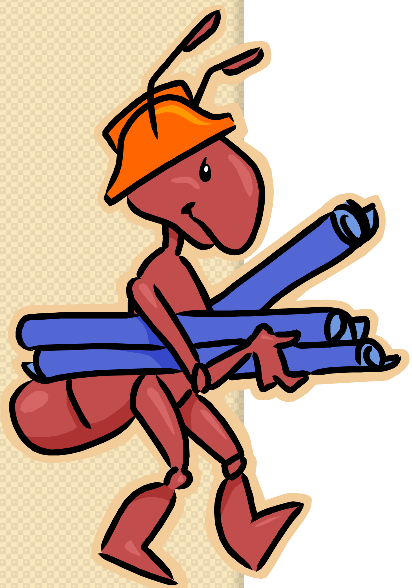
Marco Dorigo [*1961]

Motivações

- Há uma grande variedade de espécies de formigas pelo mundo.
  - Muitas apresentam comportamento de forrageamento similar.
- Experimentos em campo e laboratório demonstram capacidade de:
  - Explorar fontes ricas de alimentos sem perder a capacidade de explorar o ambiente.
    - **Exploração x Explotação**
  - Encontrar o menor caminho entre a fonte de alimento e o ninho.

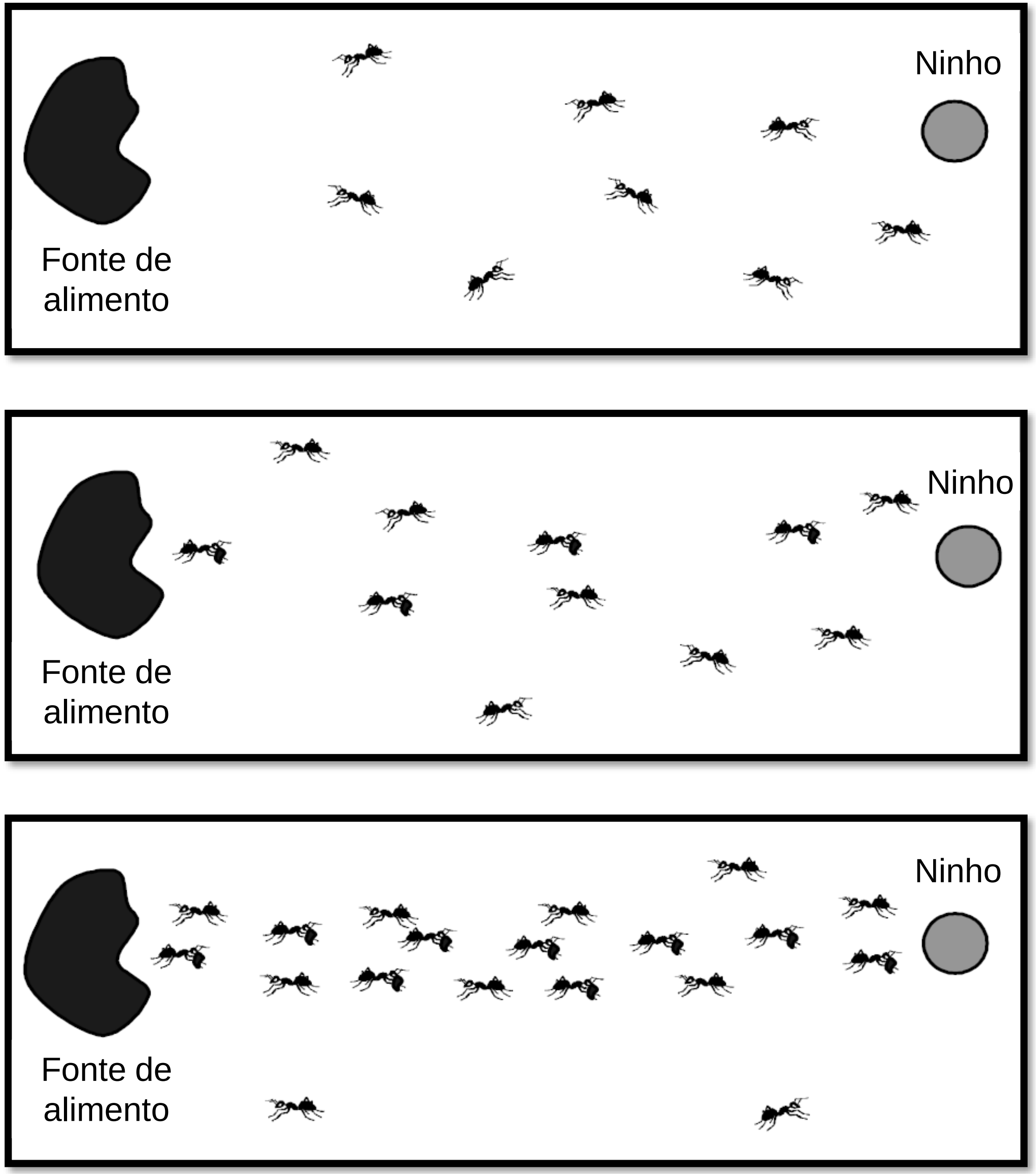
Motivações

- A escolha do caminho mais curto permite que as formigas minimizem o tempo gasto na viagem entre o ninho e a fonte de alimento.
  - Menos tempo para completar a rota.
  - Coleta mais rápida minimiza risco de que a fonte de alimento seja achada e monopolizada por um competidor mais forte, como uma colônia maior.
  - Custos de transporte menores.



Motivações

- Apesar de viverem em colônias, em poucas espécies de formigas há evidência da presença de líderes, modelos, receitas, etc. influenciando no padrão de forrageamento.
- Em vez disso, o processo parece ser baseado em uma competição local entre informações:
  - Concentrações variáveis de feromônio nas trilhas.
  - Usadas pelas formigas individuais para tomarem decisões coletivas de forrageamento.



No comportamento de forrageamento de algumas espécies, formigas recrutam colegas de ninho ao liberar feromônio no caminho da fonte de alimento até o ninho; uma trilha de feromônio é então estabilizada.

(a) Formigas forrageando.

(b) Algumas formigas encontraram a fonte de alimento e começaram a recrutar colegas de ninho ao liberar feromônio.

(c) Uma trilha de feromônio é formada.

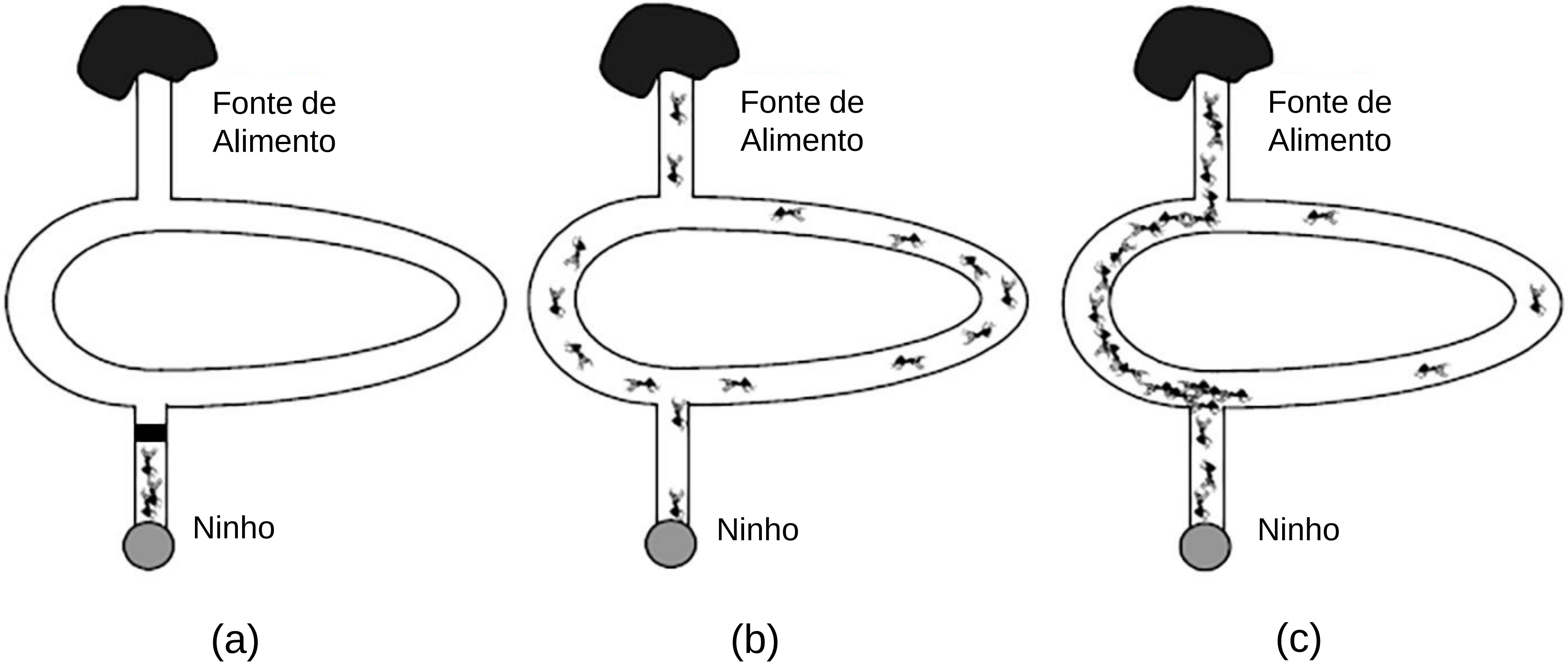
CASTRO, Leandro Nunes. Fundamentals of Natural Computing: Basic Concepts, Algorithms, And Applications. CRC Press, 2006.

Recrutamento

- O recrutamento é um mecanismo comportamental que permite que uma colônia de formigas:
  - Agregue um grande número de forrageadoras para uma fonte de alimento desejável.
  - Tome decisões de forma eficiente, como escolher a fonte de alimentos mais rentável ou **encontrar o menor caminho entre a fonte de alimentos e o ninho**.

Experimento com Formigas Argentinas

- Experimentos com formigas argentinas mostram que elas conseguem encontrar o menor caminho entre o ninho e uma fonte de alimento.
  - Uma fonte de alimento foi colocada em uma arena conectada ao ninho por uma ponte composta por dois ramos de diferentes comprimentos, de forma que as formigas precisavam escolher um dos ramos.



(a) A ponte está inicialmente fechada.

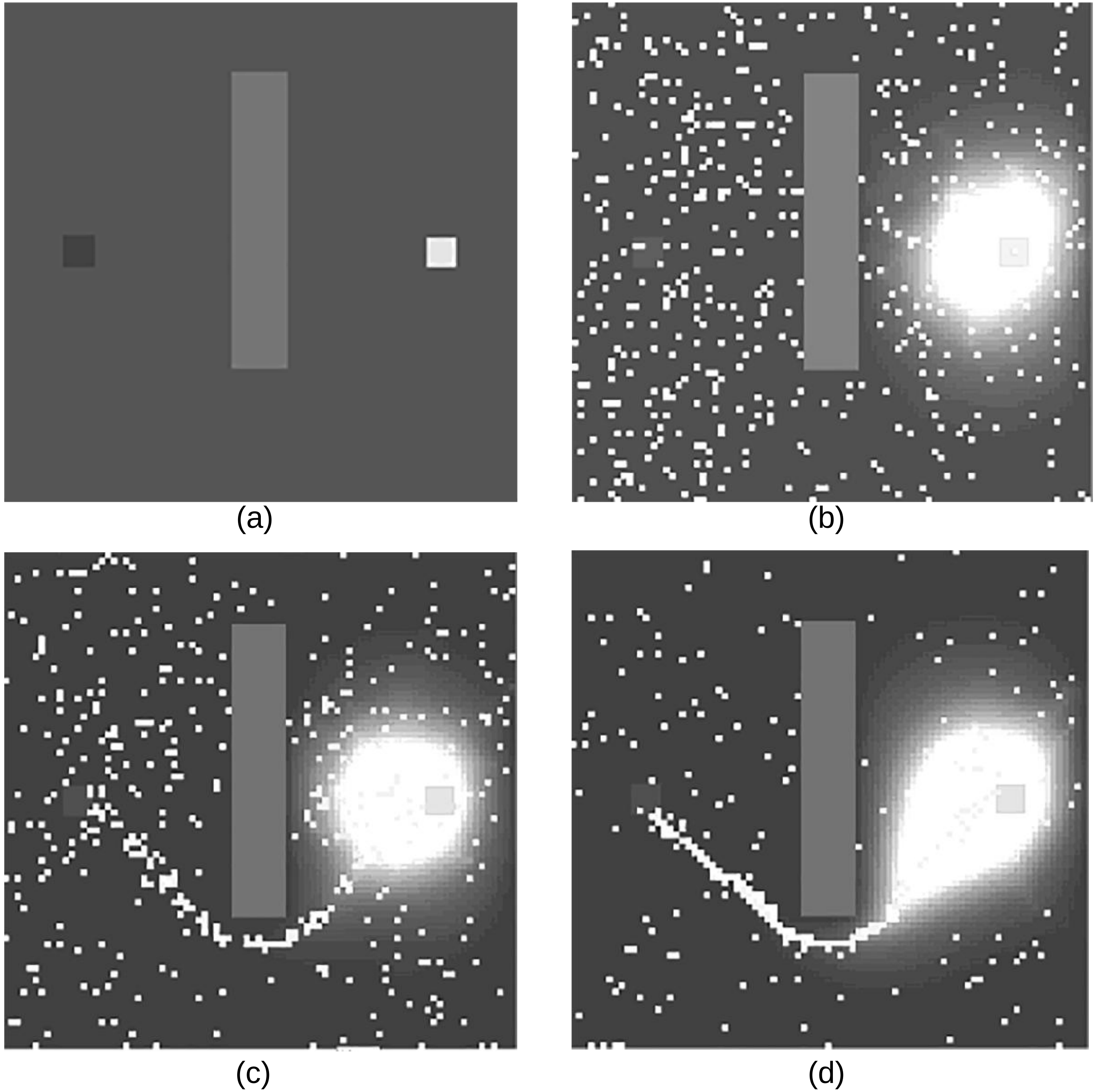
(b) Distribuição inicial das formigas após a ponte ser aberta.

(c) Distribuição das formigas após algum tempo ter passado desde que foi permitido que elas explorem a fonte de alimento.

CASTRO, Leandro Nunes. Fundamentals of Natural Computing: Basic Concepts, Algorithms, And Applications. CRC Press, 2006.

Experimento com Formigas Argentinas

- Nesses experimentos, também foi observado que:
  - A probabilidade de escolher a menor rota aumenta conforme a diferença de distância entre os dois ramos.
  - Acrescentar um novo ramo mais curto após o caminho mais longo já estar consolidado não faz as formigas mudarem sua escolha.



Simulação de vida artificial: formigas depositando e seguindo trilhas de feromônio.

(a) Configuração do ambiente. O quadrado na esquerda corresponde ao ninho das formigas, e o da direita à fonte de alimentos.

(b) 500 formigas deixam o ninho em busca de comida, e depositam feromônio (em branco) enquanto carregam comida de volta ao ninho.

(c) O depósito de feromônio no ambiente serve como reforço de sinal para recrutar outras formigas e obter alimento.

(d) Uma trilha de feromônio é estabelecida na rota mais curta.

CASTRO, Leandro Nunes. Fundamentals of Natural Computing: Basic Concepts, Algorithms, And Applications. CRC Press, 2006.

Modelos de Formigas Artificiais

- *Formigas artificiais* depositando e seguindo trilhas de *feromônio artificial*.

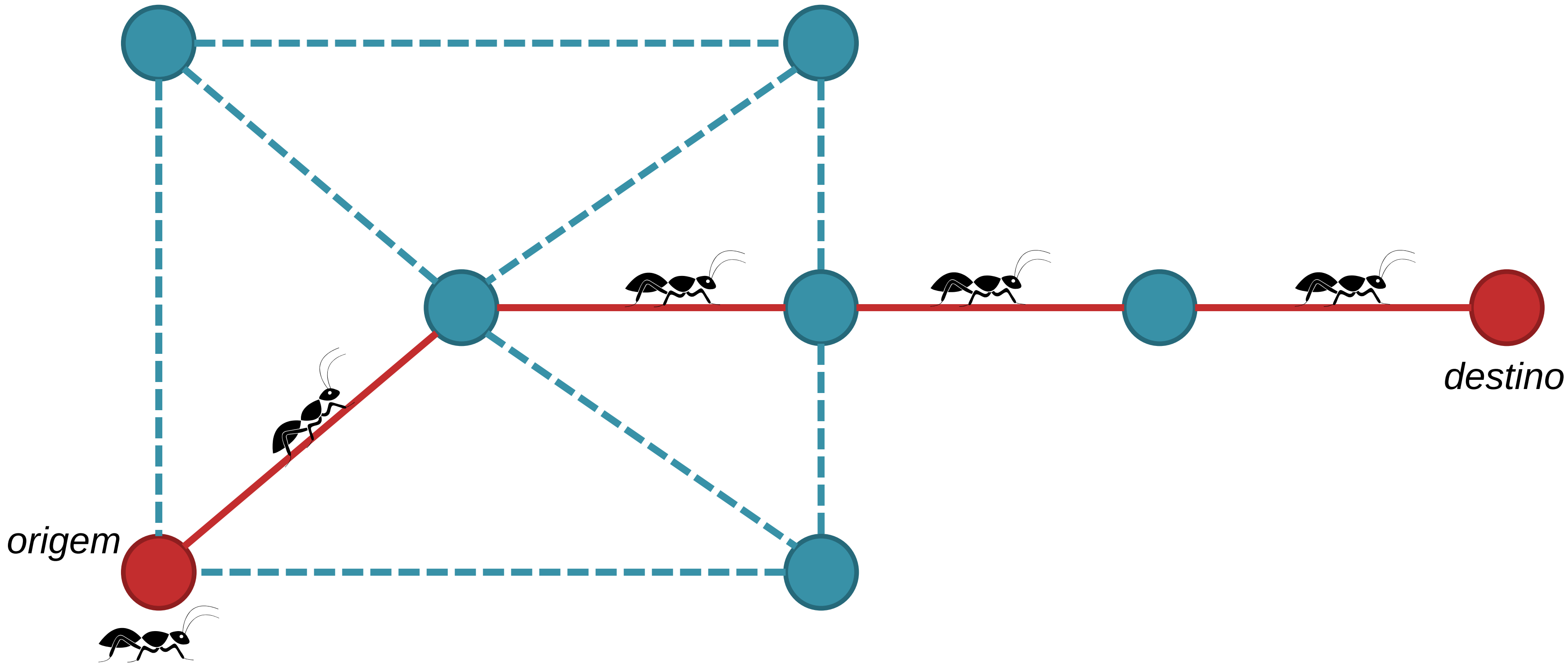
- Características que *não estão presentes* nas formigas naturais:
  - Vivem em um mundo discreto.
    - Seus movimentos são transições de um estado discreto para outro estado discreto.
  - Têm um estado interno.
    - Memórias das ações anteriores da formiga.
  - Período para atualização do depósito de feromônio pode depender de encontrar ou não uma solução.
  - Podem apresentar capacidades adicionais.

Algoritmos de Ant Colony Optimization

- Ainda existe muita pesquisa em andamento neste assunto.
  - Assim como nos demais assuntos vistos durante o curso.
  - Portanto existem várias versões e extensões dos algoritmos de formigas.
  - Veremos primeiramente um dos algoritmos ACO mais simples.
    - Para facilitar a compreensão dos conceitos básicos.
    - Não é recomendável para uso em problemas genéricos.

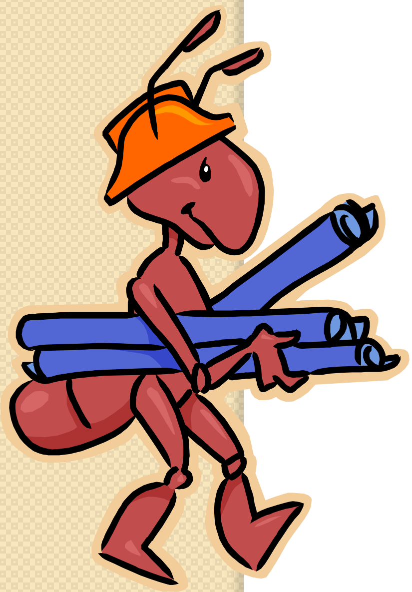
Algoritmo ACO simples

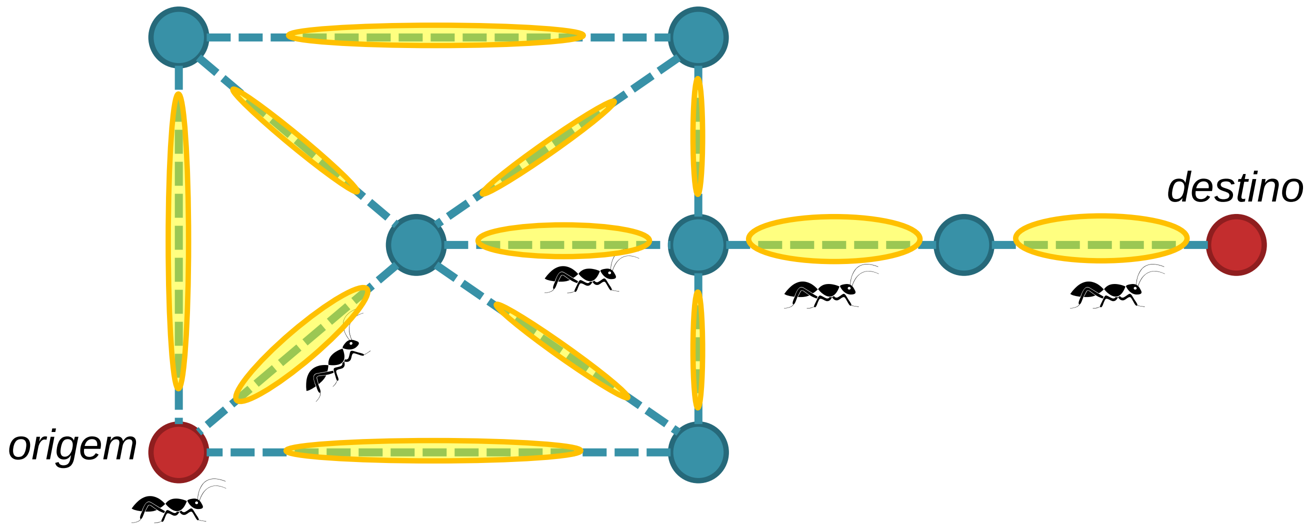
- Dado um grafo $G = (V, E)$, o caminho mais curto entre um dado par de vértices pode ser encontrado.



Feromônio Artificial

- Cada aresta (i, j) do grafo tem uma variável τ_{ij} chamada *trilha de feromônio artificial*, ou simplesmente *feromônio*.
  - Cada formiga é capaz de "marcar" uma aresta com feromônio e "farejar" (ler) o feromônio da aresta.



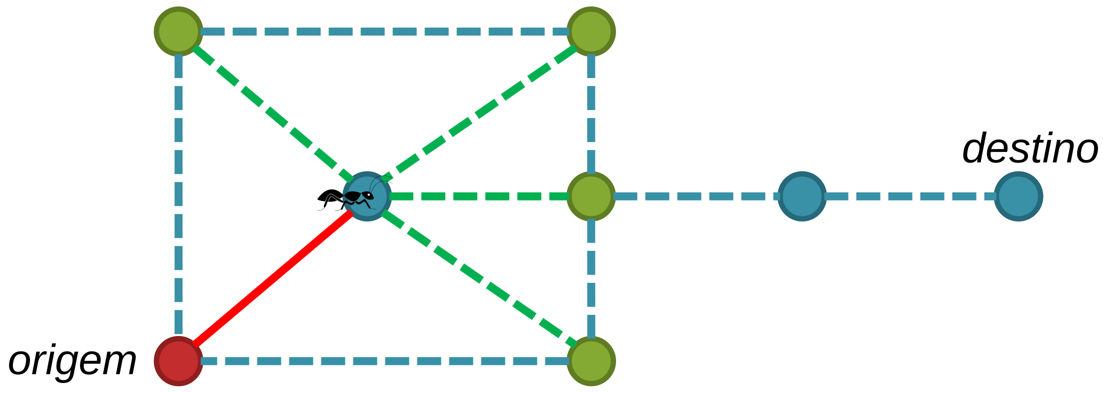


Movimentação das Formigas

- As formigas se movimentam de um nó para outro, sempre escolhendo um dentre os nós vizinhos.
- O nível de feromônio dos vizinhos é usado pela formiga para decidir probabilisticamente para qual nó se mover:
  - $p_{ij}^{k}(t) = \begin{cases} \dfrac{\tau_{ij}(t)}{\sum_{j \in N_i} \tau_{ij}(t)} & \text{se } j \in N_i \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$
    - p_{ij}^{k} é a probabilidade de que a formiga k que está no nó i vá para o nó j
    - τ_{ij} é o nível de feromônio da aresta (i, j)
    - t é a iteração
    - N_i é o conjunto de vizinhos diretos do nó i

Algoritmo ACO simples

- A formiga pode não incluir em N_i o nó visitado imediatamente antes do nó i
  - Evita o retorno imediato ao predecessor.
  - Porém a inclusão precisa ser feita quando o nó i está na extremidade.
    - não tem outros vizinhos.



Lista de Nós já Visitados

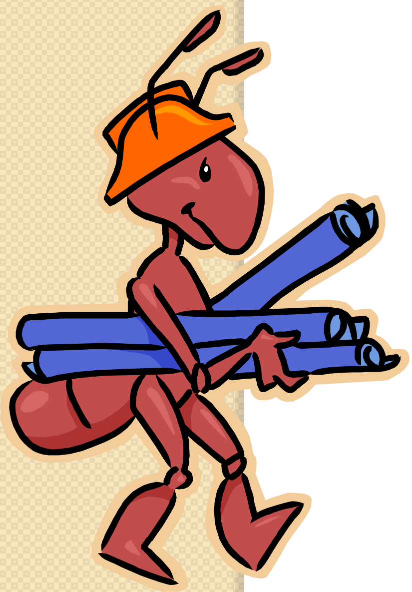
- Outra alternativa é a formiga memorizar uma lista de nós já visitados.
  - Não visitá-los novamente!
    - A menos que não haja outra opção.

Depósito de Feromônio

- Quando passa por uma aresta (i, j), a formiga deposita algum feromônio nela.
- O nível de feromônio de (i, j) é atualizado:
  - $\tau_{ij} \leftarrow \tau_{ij} + \Delta\tau$
    - $\Delta\tau$ é a quantidade de feromônio depositada pela formiga.
      - Pode ser função do tamanho total da trilha percorrida.
        - Quanto menor a trilha, mais feromônio é depositado.

Reforço Positivo

- Ao depositar feromônios em uma aresta, a formiga aumenta as chances dessa aresta ser selecionada por outra formiga.
  - Reforça a trilha que passa por esta aresta.
  - O reforço positivo favorece a seleção de caminhos mais curtos.



Depósito de Feromônio no Retorno à Origem

- O depósito de feromônio é feito apenas no retorno da formiga à origem.
  - Permite que a quantidade depositada ($\Delta\tau$) seja inversamente proporcional ao tamanho da trilha.
  - As formigas podem fazer suas trilhas em paralelo, de modo que o feromônio depositado no retorno só influenciará a próxima iteração.

Algoritmo ACO simples

- É capaz de selecionar a rota mais curta entre o ninho e a fonte de alimento em situações simples.
- Fica instável quando a complexidade do grafo aumenta.

Evaporação de Feromônio

- Permite tratar grafos mais complexos.
- Evita convergência rápida de todas as formigas para caminhos sub-ótimos.

$$\tau_{ij} \leftarrow (1 - \rho)\, \tau_{ij}$$

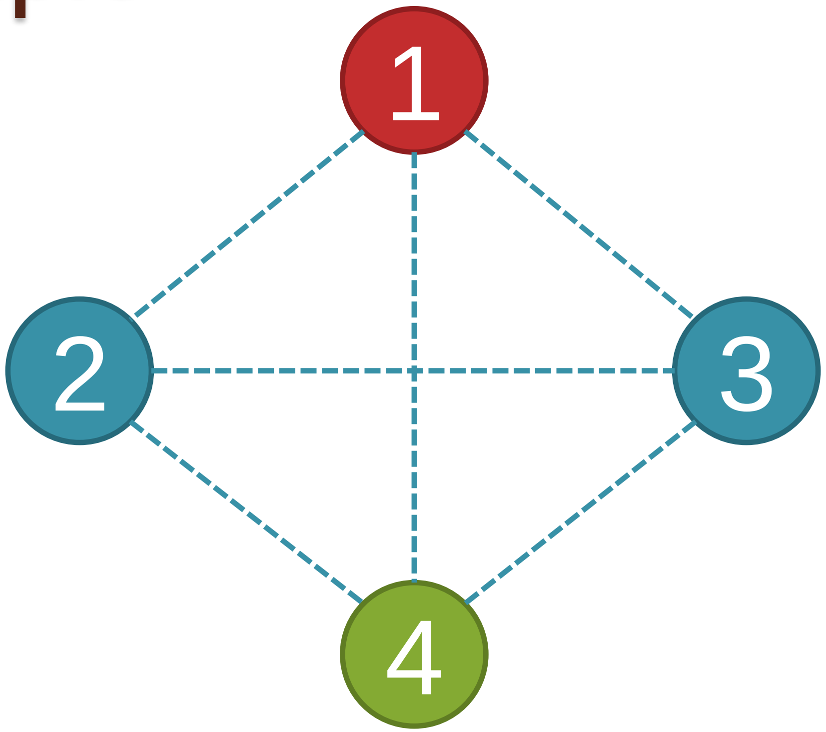
$\rho \in (0,1]$ é a taxa de decaimento do feromônio

Evaporação de Feromônio

- Favorece:
  - Exploração de caminhos diferentes durante a busca.
  - Esquecimento de erros ou caminhos ruins feitos no passado.
- Permite o contínuo aprimoramento da solução aprendida.
- Quantidade máxima de feromônio presente em um caminho não assume um valor muito elevado.

ACO Simples: um exemplo

- Vamos encontrar o menor caminho da origem (nó 1) até o destino (nó 4).



Origem: 1
Destino: 4

Exemplo: Algoritmo para o ACO Simples

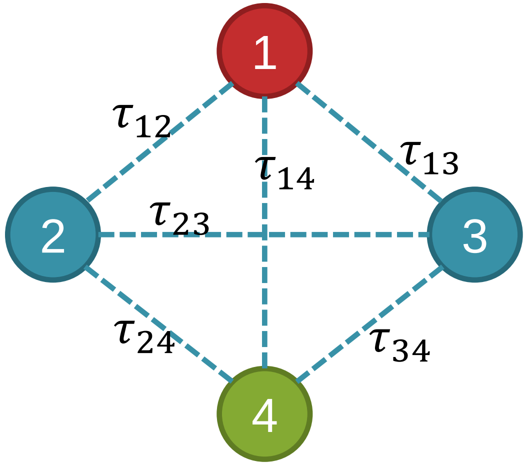
- Em cada iteração vamos:
  1. Construir um caminho (solução) para cada formiga da origem até o destino (fonte de alimento).
     - As arestas a serem visitadas serão escolhidas aleatoriamente com pesos proporcionais à quantidade de feromônio presente nelas.
  2. Evaporar o feromônio de todas as arestas.
  3. Cada formiga depositará feromônio nas arestas que fazem parte de sua solução (retorno ao ninho).
     - Quantidade é proporcional à qualidade desta solução.
       - Neste caso, a quantidade de feromônio depositado no caminho será constante, e dividida pela quantidade de arestas presentes na solução.
         - Pois estamos tratando um grafo sem pesos e queremos encontrar o caminho mais curto, que será aquele com menos arestas.

Exemplo – Notação

- p_{ij}^{k} é a probabilidade de que a formiga k no nó i vá para o nó j
- τ_{ij} é o nível de feromônio da aresta (i, j)
- t é a iteração
- N_i é o conjunto de vizinhos diretos do nó i
- τ_0 é a quantidade inicial (em $t = 0$) de feromônio de todas as arestas
- ρ é a taxa de evaporação
- $\Delta\tau_{ij}^{k}$ é a quantidade de feromônio colocada na aresta (i, j) pela formiga k
- L^k é a quantidade de arestas no caminho percorrido pela formiga k

$$t = 1$$

Exemplo



Origem: 1
Destino: 4

4 formigas

$$\tau_0 = 1$$
$$\rho = 0{,}5$$
$$\Delta\tau_{ij}^k = 1/L^k$$

$$\tau_{12} = 1$$
$$\tau_{13} = 1$$
$$\tau_{14} = 1$$
$$\tau_{23} = 1$$
$$\tau_{24} = 1$$
$$\tau_{34} = 1$$

Formiga 1:

Vértice 1:

$$p_{12}^1 = 0{,}33$$
$$p_{13}^1 = 0{,}33$$
$$p_{14}^1 = 0{,}33$$

Vértice 2:

$$p_{23}^1 = 0{,}5$$
$$p_{24}^1 = 0{,}5$$

$$\Delta\tau_{12}^1 = 0{,}5$$
$$\Delta\tau_{24}^1 = 0{,}5$$

Formiga 2:

Vértice 1:

$$p_{12}^2 = 0{,}33$$
$$p_{13}^2 = 0{,}33$$
$$p_{14}^2 = 0{,}33$$

$$\Delta\tau_{14}^2 = 1$$

Formiga 3:

Vértice 1:

$$p_{12}^3 = 0{,}33$$
$$p_{13}^3 = 0{,}33$$
$$p_{14}^3 = 0{,}33$$

$$\Delta\tau_{14}^3 = 1$$

Formiga 4:

Vértice 1:

$$p_{12}^4 = 0{,}33$$
$$p_{13}^4 = 0{,}33$$
$$p_{14}^4 = 0{,}33$$

Vértice 2:

$$p_{23}^4 = 0{,}5$$
$$p_{24}^4 = 0{,}5$$

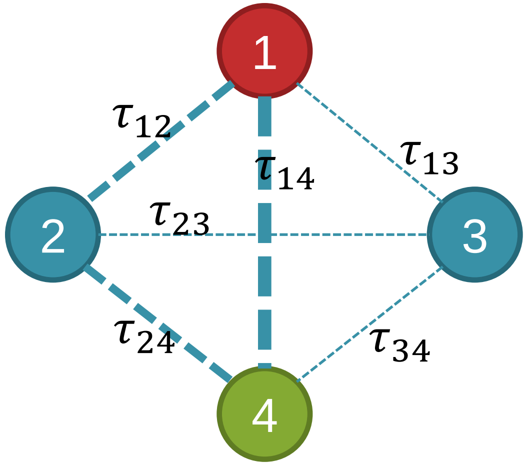
$$\Delta\tau_{12}^4 = 0{,}5$$
$$\Delta\tau_{24}^4 = 0{,}5$$

Evaporação e Depósito de Feromônio:

$$\tau_{12} = 1 \times 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}5 = 1{,}5$$
$$\tau_{13} = 1 \times 0{,}5 = 0{,}5$$
$$\tau_{14} = 1 \times 0{,}5 + 1 + 1 = 2{,}5$$
$$\tau_{23} = 1 \times 0{,}5 = 0{,}5$$
$$\tau_{24} = 1 \times 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}5 = 1{,}5$$
$$\tau_{34} = 1 \times 0{,}5 = 0{,}5$$

Exemplo

$t = 2$



Origem: 1
Destino: 4

4 formigas

$\tau_0 = 1$

$\rho = 0{,}5$

$\Delta\tau_{ij}^{k} = 1/L^{k}$

$\tau_{12} = 1{,}5$
$\tau_{13} = 0{,}5$
$\tau_{14} = 2{,}5$
$\tau_{23} = 0{,}5$
$\tau_{24} = 1{,}5$
$\tau_{34} = 0{,}5$

Formiga 1:
Vértice 1:
$p_{12}^{1} = 0{,}33$
$p_{13}^{1} = 0{,}11$
$p_{14}^{1} = 0{,}56$

$\Delta\tau_{14}^{1} = 1$

Formiga 2:
Vértice 1:
$p_{12}^{2} = 0{,}33$
$p_{13}^{2} = 0{,}11$
$p_{14}^{2} = 0{,}56$

$\Delta\tau_{14}^{2} = 1$

Formiga 3:
Vértice 1:
$p_{12}^{3} = 0{,}33$
$p_{13}^{3} = 0{,}11$
$p_{14}^{3} = 0{,}56$

$\Delta\tau_{14}^{3} = 1$

Formiga 4:
Vértice 1:
$p_{12}^{4} = 0{,}33$
$p_{13}^{4} = 0{,}11$
$p_{14}^{4} = 0{,}56$

Vértice 2:
$p_{23}^{4} = 0{,}25$
$p_{24}^{4} = 0{,}75$

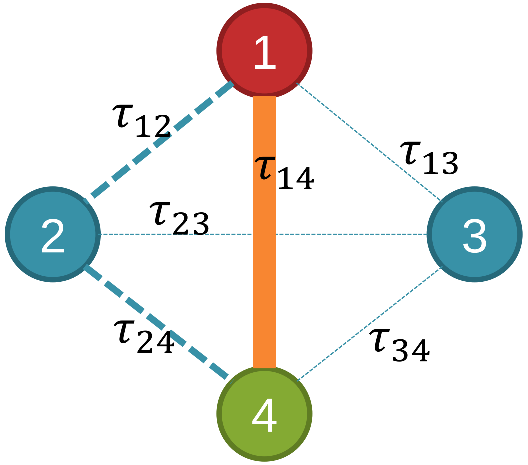
$\Delta\tau_{12}^{4} = 0{,}5$
$\Delta\tau_{24}^{4} = 0{,}5$

Evaporação e Depósito de Feromônio:

$$\tau_{12} = 1{,}5 \times 0{,}5 + 0{,}5 = 1{,}25$$
$$\tau_{13} = 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$$
$$\tau_{14} = 2{,}5 \times 0{,}5 + 1 + 1 + 1 = 4{,}25$$
$$\tau_{23} = 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$$
$$\tau_{24} = 1{,}5 \times 0{,}5 + 0{,}5 = 1{,}25$$
$$\tau_{34} = 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$$

$$t = 3$$

Exemplo



Origem: 1
Destino: 4

4 formigas

$\tau_0 = 1$

$\rho = 0{,}5$

$\Delta\tau_{ij}^{k} = 1/L^{k}$

$\tau_{12} = 1{,}25$
$\tau_{13} = 0{,}25$
$\tau_{14} = 4{,}25$
$\tau_{23} = 0{,}25$
$\tau_{24} = 1{,}25$
$\tau_{34} = 0{,}25$

Formiga 1:
Vértice 1:
$p_{12}^{1} = 0{,}22$
$p_{13}^{1} = 0{,}04$
$p_{14}^{1} = 0{,}74$

$\Delta\tau_{14}^{1} = 1$

Formiga 2:
Vértice 1:
$p_{12}^{2} = 0{,}22$
$p_{13}^{2} = 0{,}04$
$p_{14}^{2} = 0{,}74$

$\Delta\tau_{14}^{2} = 1$

Formiga 3:
Vértice 1:
$p_{12}^{3} = 0{,}22$
$p_{13}^{3} = 0{,}04$
$p_{14}^{3} = 0{,}74$

$\Delta\tau_{14}^{3} = 1$

Formiga 4:
Vértice 1:
$p_{12}^{4} = 0{,}22$
$p_{13}^{4} = 0{,}04$
$p_{14}^{4} = 0{,}74$

$\Delta\tau_{14}^{4} = 1$

Evaporação e Depósito de Feromônio:

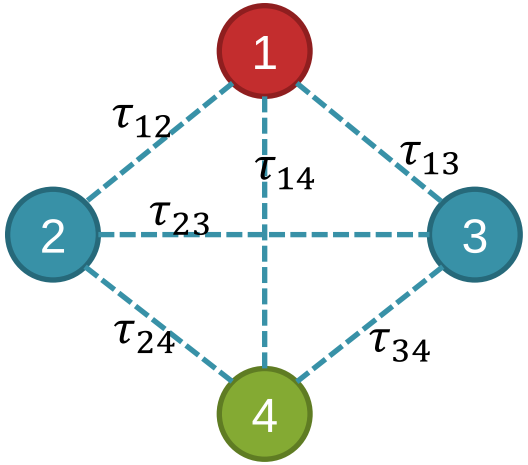
$$\tau_{12} = 1{,}25 \times 0{,}5 = 0{,}62$$
$$\tau_{13} = 0{,}25 \times 0{,}5 = 0{,}12$$
$$\tau_{14} = 4{,}25 \times\ 0{,}5 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6{,}12$$
$$\tau_{23} = 0{,}25 \times 0{,}5 = 0{,}12$$
$$\tau_{24} = 1{,}25 \times 0{,}5 = 0{,}62$$
$$\tau_{34} = 0{,}25 \times 0{,}5 = 0{,}12$$

Exemplo

- Parece que tivemos sorte de metade das formigas terem escolhido o caminho ótimo logo na primeira iteração.
  - O que aconteceria se nenhuma formiga tivesse escolhido o caminho ótimo na primeira iteração?
    - O algoritmo ainda seria capaz de esquecer os caminhos sub-ótimos e encontrar o caminho ótimo?
      - Vamos testar...

Exemplo

$t = 1$



Origem: 1
Destino: 4

4 formigas

$\tau_0 = 1$

$\rho = 0{,}5$

$\Delta\tau_{ij}^k = 1/L^k$

$\tau_{12} = 1$
$\tau_{13} = 1$
$\tau_{14} = 1$
$\tau_{23} = 1$
$\tau_{24} = 1$
$\tau_{34} = 1$

Formiga 1:

Vértice 1:
$p_{12}^1 = 0{,}33$
$p_{13}^1 = 0{,}33$
$p_{14}^1 = 0{,}33$

Vértice 2:
$p_{23}^1 = 0{,}5$
$p_{24}^1 = 0{,}5$

$\Delta\tau_{12}^1 = 0{,}5$
$\Delta\tau_{24}^1 = 0{,}5$

Formiga 2:

Vértice 1:
$p_{12}^2 = 0{,}33$
$p_{13}^2 = 0{,}33$
$p_{14}^2 = 0{,}33$

Vértice 3:
$p_{32}^2 = 0{,}5$
$p_{34}^2 = 0{,}5$

$\Delta\tau_{13}^2 = 0{,}5$
$\Delta\tau_{34}^2 = 0{,}5$

Formiga 3:

Vértice 1:
$p_{12}^3 = 0{,}33$
$p_{13}^3 = 0{,}33$
$p_{14}^3 = 0{,}33$

Vértice 3:
$p_{32}^3 = 0{,}5$
$p_{34}^3 = 0{,}5$

Vértice 2:
$p_{24}^3 = 1$

$\Delta\tau_{13}^3 = 0{,}33$
$\Delta\tau_{23}^3 = 0{,}33$
$\Delta\tau_{24}^3 = 0{,}33$

Formiga 4:

Vértice 1:
$p_{12}^4 = 0{,}33$
$p_{13}^4 = 0{,}33$
$p_{14}^4 = 0{,}33$

Vértice 2:
$p_{23}^4 = 0{,}5$
$p_{24}^4 = 0{,}5$

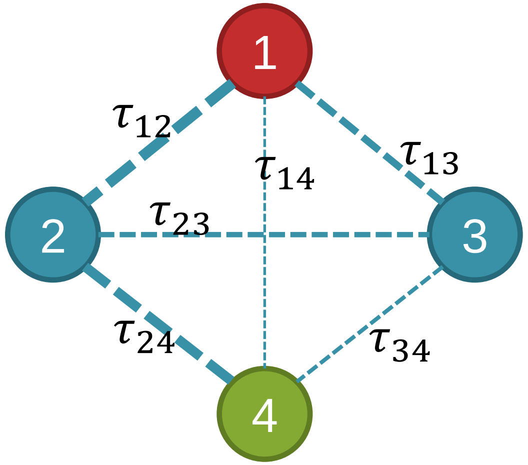
$\Delta\tau_{12}^4 = 0{,}5$
$\Delta\tau_{24}^4 = 0{,}5$

Evaporação e Depósito de Feromônio:

$$\tau_{12} = 1 \times 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}5 = 2$$
$$\tau_{13} = 1 \times 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}33 = 1{,}33$$
$$\tau_{14} = 1 \times 0{,}5 = 0{,}5$$
$$\tau_{23} = 1 \times 0{,}5 + 0{,}33 = 0{,}83$$
$$\tau_{24} = 1 \times 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}33 + 0{,}5 = 1{,}83$$
$$\tau_{34} = 1 \times 0{,}5 + 0{,}5 = 1$$

Exemplo

$t = 2$



Origem: 1
Destino: 4

4 formigas

$\tau_0 = 1$

$\rho = 0{,}5$

$\Delta\tau_{ij}^{k} = 1/L^k$

$\tau_{12} = 2$
$\tau_{13} = 1{,}33$
$\tau_{14} = 0{,}5$
$\tau_{23} = 0{,}83$
$\tau_{24} = 1{,}83$
$\tau_{34} = 1$

Formiga 1:

Vértice 1:
$p_{12}^{1} = 0{,}52$
$p_{13}^{1} = 0{,}35$
$p_{14}^{1} = 0{,}13$

Vértice 2:
$p_{23}^{1} = 0{,}31$
$p_{24}^{1} = 0{,}69$

$\Delta\tau_{12}^{1} = 0{,}5$
$\Delta\tau_{24}^{1} = 0{,}5$

Formiga 2:

Vértice 1:
$p_{12}^{2} = 0{,}52$
$p_{13}^{2} = 0{,}35$
$p_{14}^{2} = 0{,}13$

Vértice 2:
$p_{23}^{2} = 0{,}31$
$p_{24}^{2} = 0{,}69$

$\Delta\tau_{12}^{2} = 0{,}5$
$\Delta\tau_{24}^{2} = 0{,}5$

Formiga 3:

Vértice 1:
$p_{12}^{3} = 0{,}52$
$p_{13}^{3} = 0{,}35$
$p_{14}^{3} = 0{,}13$

$\Delta\tau_{14}^{3} = 1$

Formiga 4:

Vértice 1:
$p_{12}^{4} = 0{,}52$
$p_{13}^{4} = 0{,}35$
$p_{14}^{4} = 0{,}13$

Vértice 2:
$p_{23}^{4} = 0{,}31$
$p_{24}^{4} = 0{,}69$

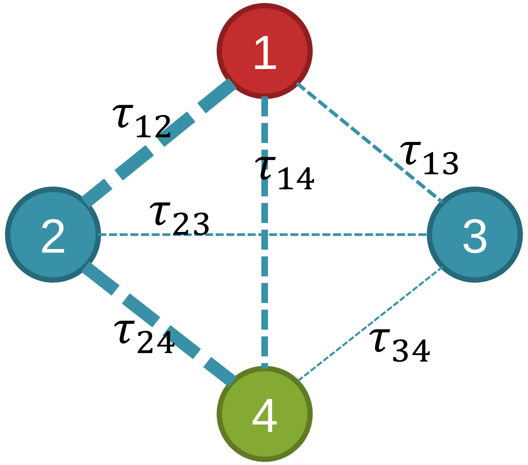
$\Delta\tau_{12}^{4} = 0{,}5$
$\Delta\tau_{24}^{4} = 0{,}5$

Evaporação e Depósito de Feromônio:

$$\tau_{12} = 2 \times 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}5 = 2{,}5$$
$$\tau_{13} = 1{,}33 \times 0{,}5 = 0{,}66$$
$$\tau_{14} = 0{,}5 \times 0{,}5 + 1 = 1{,}25$$
$$\tau_{23} = 0{,}83 \times 0{,}5 = 0{,}42$$
$$\tau_{24} = 1{,}83 \times 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}5 = 2{,}42$$
$$\tau_{34} = 1 \times 0{,}5 = 0{,}5$$

Exemplo

$t = 3$



Origem: 1
Destino: 4

$$\tau_{12} = 2{,}5$$
$$\tau_{13} = 0{,}66$$
$$\tau_{14} = 1{,}25$$
$$\tau_{23} = 0{,}42$$
$$\tau_{24} = 2{,}42$$
$$\tau_{34} = 0{,}5$$

4 formigas
$$\tau_0 = 1$$
$$\rho = 0{,}5$$
$$\Delta\tau_{ij}^k = 1/L^k$$

Formiga 1:

Vértice 1:
$$p_{12}^1 = 0{,}57$$
$$p_{13}^1 = 0{,}15$$
$$p_{14}^1 = 0{,}28$$

Vértice 2:
$$p_{23}^1 = 0{,}15$$
$$p_{24}^1 = 0{,}85$$

$$\Delta\tau_{12}^1 = 0{,}5$$
$$\Delta\tau_{24}^1 = 0{,}5$$

Formiga 2:

Vértice 1:
$$p_{12}^2 = 0{,}57$$
$$p_{13}^2 = 0{,}15$$
$$p_{14}^2 = 0{,}28$$

$$\Delta\tau_{14}^2 = 1$$

Formiga 3:

Vértice 1:
$$p_{12}^3 = 0{,}57$$
$$p_{13}^3 = 0{,}15$$
$$p_{14}^3 = 0{,}28$$

$$\Delta\tau_{14}^3 = 1$$

Formiga 4:

Vértice 1:
$$p_{12}^4 = 0{,}57$$
$$p_{13}^4 = 0{,}15$$
$$p_{14}^4 = 0{,}28$$

Vértice 2:
$$p_{23}^4 = 0{,}15$$
$$p_{24}^4 = 0{,}85$$

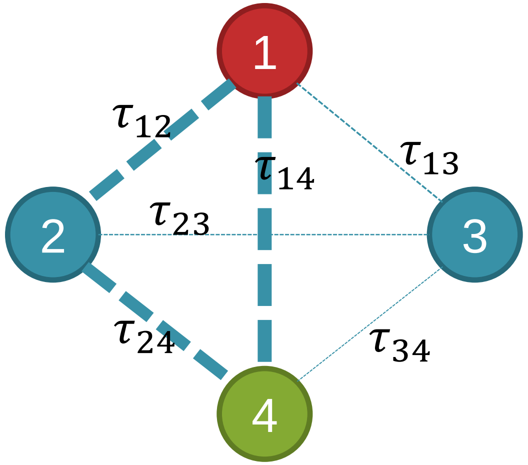
$$\Delta\tau_{12}^4 = 0{,}5$$
$$\Delta\tau_{24}^4 = 0{,}5$$

Evaporação e Depósito de Feromônio:

$$\tau_{12} = 2{,}5 \times 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}5 = 2{,}25$$
$$\tau_{13} = 0{,}66 \times 0{,}5 = 0{,}33$$
$$\tau_{14} = 1{,}25 \times 0{,}5 + 1 + 1 = 2{,}62$$
$$\tau_{23} = 0{,}42 \times 0{,}5 = 0{,}21$$
$$\tau_{24} = 2{,}42 \times 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}5 = 2{,}21$$
$$\tau_{34} = 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$$

Exemplo

$t = 4$



Origem: 1
Destino: 4

4 formigas

$\tau_0 = 1$

$\rho = 0{,}5$

$\Delta\tau_{ij}^k = 1/L^k$

$\tau_{12} = 2{,}25$
$\tau_{13} = 0{,}33$
$\tau_{14} = 2{,}62$
$\tau_{23} = 0{,}25$
$\tau_{24} = 2{,}21$
$\tau_{34} = 0{,}19$

Formiga 1:

Vértice 1:

$p_{12}^1 = 0{,}43$
$p_{13}^1 = 0{,}06$
$p_{14}^1 = 0{,}51$

$\Delta\tau_{14}^1 = 1$

Formiga 2:

Vértice 1:

$p_{12}^2 = 0{,}43$
$p_{13}^2 = 0{,}06$
$p_{14}^2 = 0{,}51$

Vértice 2:

$p_{23}^2 = 0{,}10$
$p_{24}^2 = 0{,}90$

Vértice 3:

$p_{34}^2 = 1$

$\Delta\tau_{12}^2 = 0{,}33$
$\Delta\tau_{23}^2 = 0{,}33$
$\Delta\tau_{34}^2 = 0{,}33$

Formiga 3:

Vértice 1:

$p_{12}^3 = 0{,}43$
$p_{13}^3 = 0{,}06$
$p_{14}^3 = 0{,}51$

$\Delta\tau_{14}^3 = 1$

Formiga 4:

Vértice 1:

$p_{12}^4 = 0{,}43$
$p_{13}^4 = 0{,}06$
$p_{14}^4 = 0{,}51$

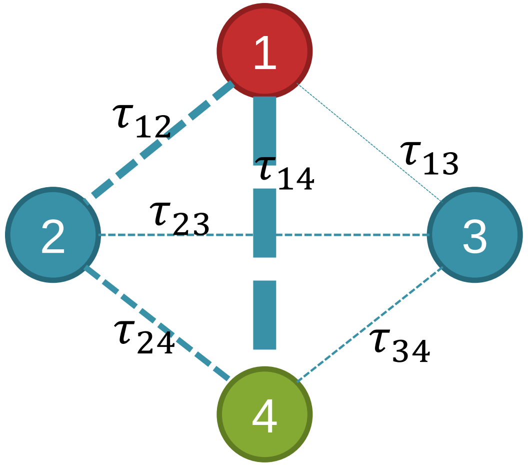
$\Delta\tau_{14}^4 = 1$

Evaporação e Depósito de Feromônio:

$$\tau_{12} = 2{,}25 \times 0{,}5 + 0{,}33 = 1{,}46$$
$$\tau_{13} = 0{,}33 \times 0{,}5 = 0{,}16$$
$$\tau_{14} = 2{,}62 \times 0{,}5 + 1 + 1 + 1 = 4{,}31$$
$$\tau_{23} = 0{,}25 \times 0{,}5 + 0{,}33 = 0{,}46$$
$$\tau_{24} = 2{,}21 \times 0{,}5 = 1{,}10$$
$$\tau_{34} = 0{,}19 \times 0{,}5 + 0{,}33 = 0{,}42$$

Exemplo

$t = 5$



Origem: 1
Destino: 4

4 formigas

$\tau_0 = 1$

$\rho = 0{,}5$

$\Delta\tau_{ij}^k = 1/L^k$

$\tau_{12} = 1{,}46$
$\tau_{13} = 0{,}16$
$\tau_{14} = 4{,}31$
$\tau_{23} = 0{,}46$
$\tau_{24} = 1{,}10$
$\tau_{34} = 0{,}42$

Formiga 1:

Vértice 1:

$p_{12}^1 = 0{,}24$
$p_{13}^1 = 0{,}03$
$p_{14}^1 = 0{,}73$

$\Delta\tau_{14}^1 = 1$

Formiga 2:

Vértice 1:

$p_{12}^2 = 0{,}24$
$p_{13}^2 = 0{,}03$
$p_{14}^2 = 0{,}73$

$\Delta\tau_{14}^2 = 1$

Formiga 3:

Vértice 1:

$p_{12}^3 = 0{,}24$
$p_{13}^3 = 0{,}03$
$p_{14}^3 = 0{,}73$

Vértice 2:

$p_{23}^3 = 0{,}29$
$p_{24}^3 = 0{,}71$

Vértice 3:

$p_{34}^3 = 1$

$\Delta\tau_{12}^3 = 0{,}33$
$\Delta\tau_{23}^3 = 0{,}33$
$\Delta\tau_{34}^3 = 0{,}33$

Formiga 4:

Vértice 1:

$p_{12}^4 = 0{,}24$
$p_{13}^4 = 0{,}03$
$p_{14}^4 = 0{,}73$

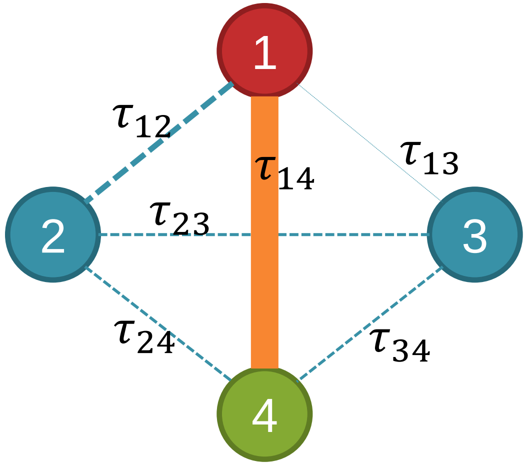
$\Delta\tau_{14}^4 = 1$

Evaporação e Depósito de Feromônio:

$$\tau_{12} = 1{,}46 \times 0{,}5 + 0{,}33 = 1{,}06$$
$$\tau_{13} = 0{,}16 \times 0{,}5 = 0{,}08$$
$$\tau_{14} = 4{,}31 \times 0{,}5 + 1 + 1 + 1 = 5{,}16$$
$$\tau_{23} = 0{,}46 \times 0{,}5 + 0{,}33 = 0{,}56$$
$$\tau_{24} = 1{,}10 \times 0{,}5 = 0{,}55$$
$$\tau_{34} = 0{,}42 \times 0{,}5 + 0{,}33 = 0{,}54$$

$$t = 6$$

Exemplo



Origem: 1
Destino: 4

4 formigas

$\tau_0 = 1$

$\rho = 0{,}5$

$\Delta\tau_{ij}^k = 1/L^k$

$\tau_{12} = 1{,}06$
$\tau_{13} = 0{,}08$
$\tau_{14} = 5{,}16$
$\tau_{23} = 0{,}56$
$\tau_{24} = 0{,}55$
$\tau_{34} = 0{,}54$

Formiga 1:
Vértice 1:
$p_{12}^1 = 0{,}17$
$p_{13}^1 = 0{,}01$
$p_{14}^1 = 0{,}82$

$\Delta\tau_{14}^1 = 1$

Formiga 2:
Vértice 1:
$p_{12}^2 = 0{,}17$
$p_{13}^2 = 0{,}01$
$p_{14}^2 = 0{,}82$

$\Delta\tau_{14}^2 = 1$

Formiga 3:
Vértice 1:
$p_{12}^3 = 0{,}17$
$p_{13}^3 = 0{,}01$
$p_{14}^3 = 0{,}82$

$\Delta\tau_{14}^3 = 1$

Formiga 4:
Vértice 1:
$p_{12}^4 = 0{,}17$
$p_{13}^4 = 0{,}01$
$p_{14}^4 = 0{,}82$

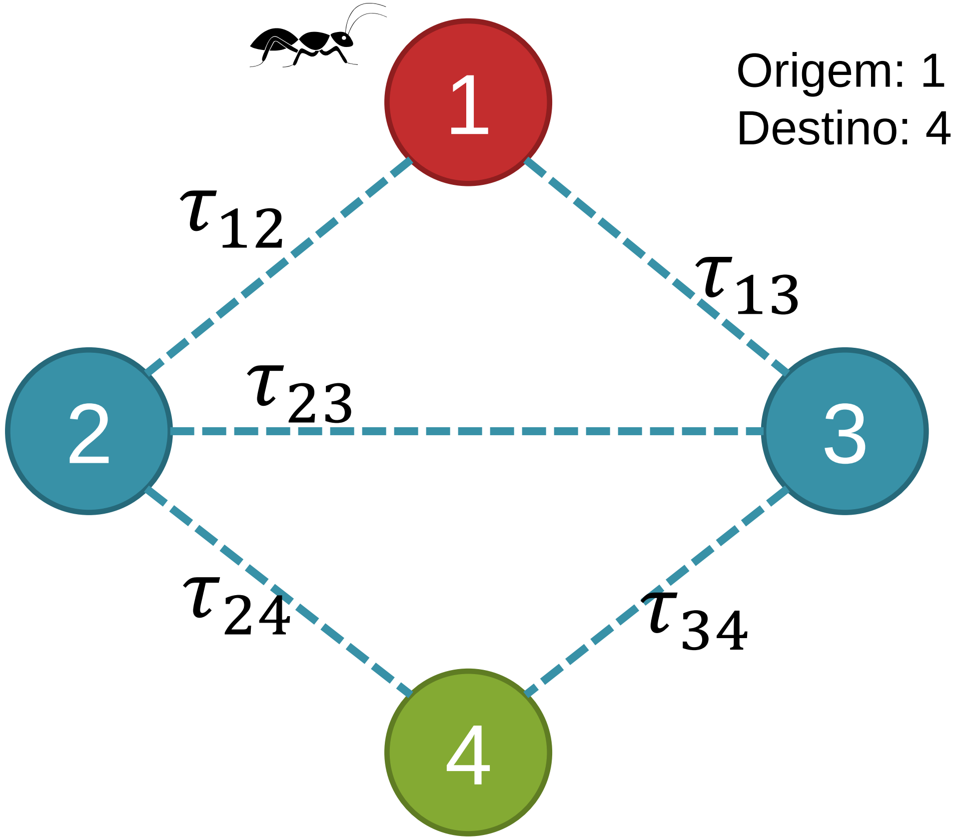
$\Delta\tau_{14}^4 = 1$

Evaporação e Depósito de Feromônio:

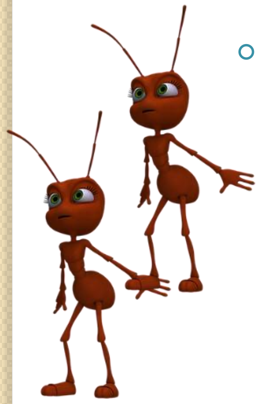
$$\tau_{12} = 1{,}06 \times 0{,}5 = 0{,}53$$
$$\tau_{13} = 0{,}08 \times 0{,}5 = 0{,}04$$
$$\tau_{14} = 5{,}16 \times \ 0{,}5 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6{,}58$$
$$\tau_{23} = 0{,}56 \times 0{,}5 = 0{,}28$$
$$\tau_{24} = 0{,}55 \times 0{,}5 = 0{,}28$$
$$\tau_{34} = 0{,}54 \times 0{,}5 = 0{,}27$$

Exercício

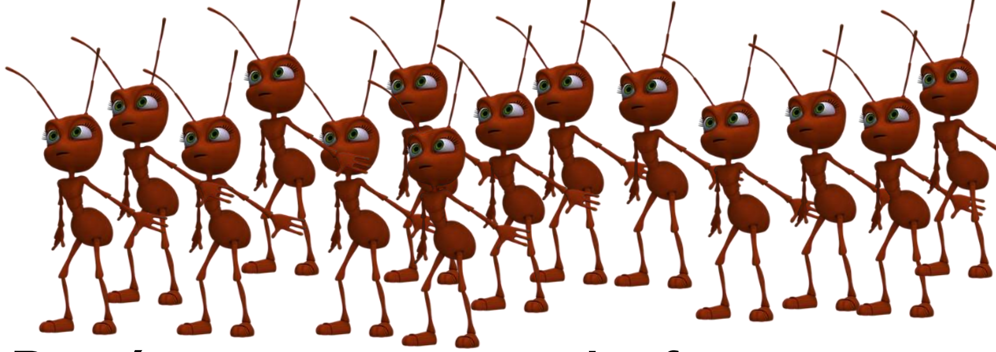
- Utilize 5 formigas para achar o menor caminho entre o vértice 1 e o vértice 4.
  - Parâmetros:
    - $\tau_0 = 1$
    - $\rho = 0{,}5$
    - $\Delta\tau_{ij}^k = 1/L^k$
      - onde L^k é a quantidade de arestas no caminho percorrido pela formiga k



Evitando caminhos sub-ótimos



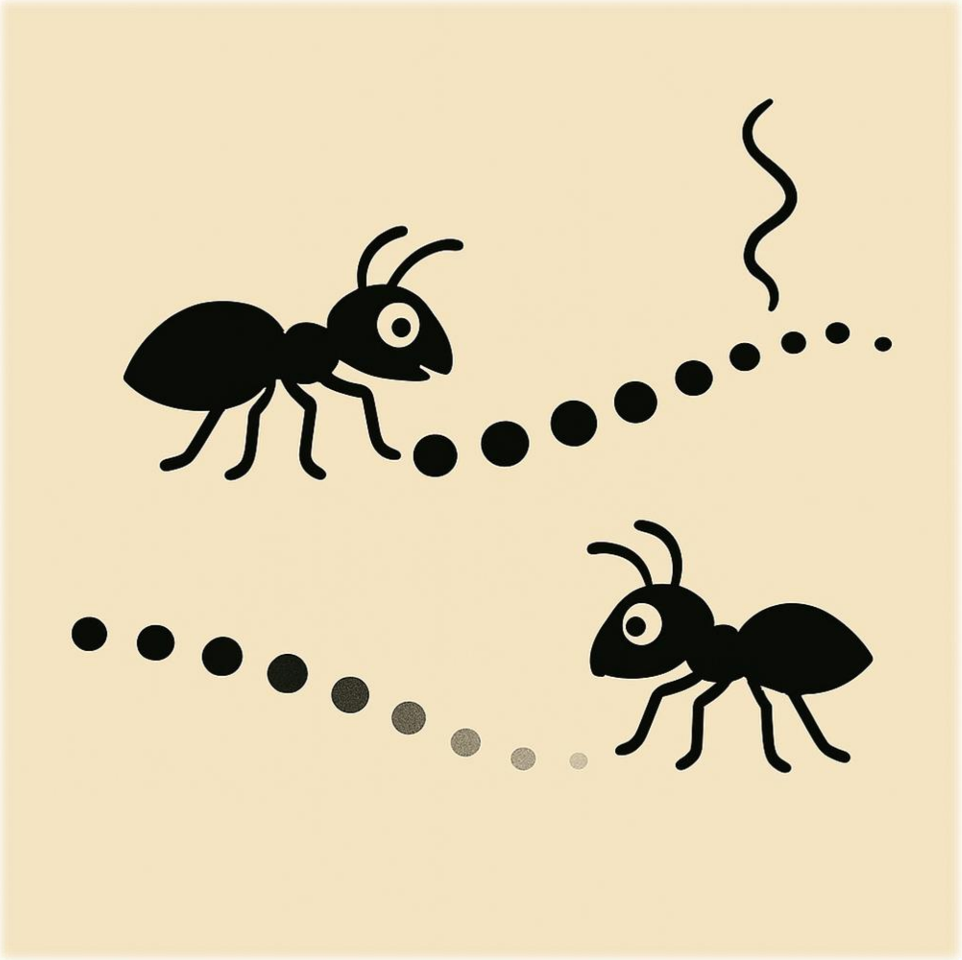
- Poucas formigas podem fazer com que o algoritmo convirja para caminhos mais longos.
  - Aleatoriedade nas primeiras decisões.
    - Com poucas formigas, haverá menos “votos” para indicar um caminho de sucesso.
  - Melhora quando mais formigas são utilizadas.



- Porém, o excesso de formigas pode reforçar caminhos sub-ótimos.
  - Caminhos que inicialmente pareciam bons, podem ser excessivamente reforçados nas próximas iterações se tivermos muitas formigas.
  - Também aumenta desnecessariamente o tempo de execução.

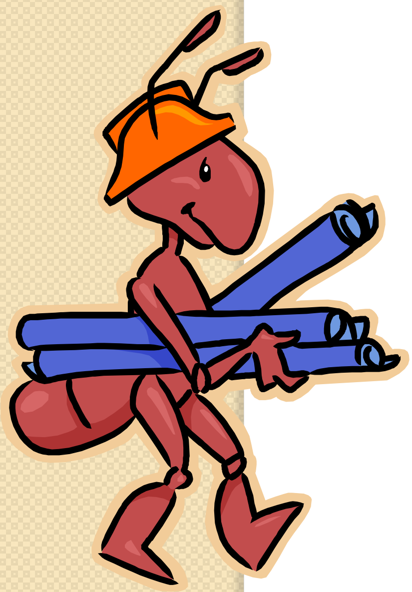
Evitando caminhos sub-ótimos

- Depositar quantidade de feromônio proporcional à qualidade da solução melhora o desempenho do algoritmo.
- Evaporação de feromônio também atrasa a convergência e reduz o risco de encontrar caminhos sub-ótimos.



Algoritmo ACO de Propósito Geral

- Um algoritmo ACO alterna a aplicação de dois procedimentos:
  - Construção/modificação de soluções paralelas.
  - Atualização de trilhas de feromônio.



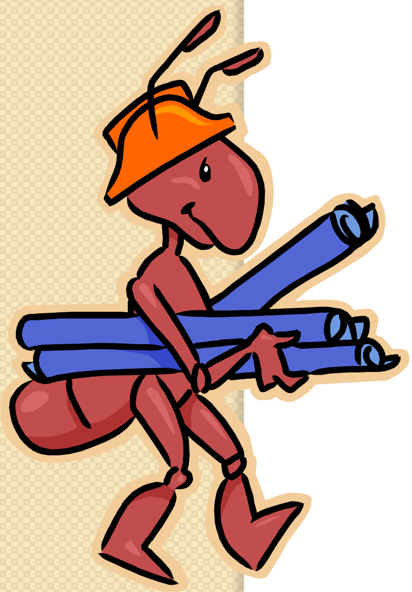
Construção/Modificação de Soluções Paralelas

- N formigas constroem/modificam N soluções em paralelo para o problema em questão.
  - A probabilidade de uma aresta ser inclusa na solução sendo construída é função do *desejo heurístico* η, e da *trilha de feromônio* τ.
    - Desejo Heurístico:
      - Preferência / Atratividade de uma determinada aresta.
        - Também se traduz na probabilidade da formiga se mover para um nó.
      - Exemplo:
        - Em um problema de escolher o caminho mais curto, pode ser o inverso da distância entre um par de nós.
          - Exemplo: um grafo com arestas ponderadas, onde os pesos indicam a distâncias.

Atualização de Trilhas de Feromônio

- As quantidades de feromônio nas arestas do grafo são atualizadas.
  - Função da taxa de evaporação ρ e da qualidade das soluções produzidas.
    - Quantidade de feromônio colocado em uma aresta pode ser proporcional à qualidade da(s) solução(ões) que passa(m) por ela.

Algoritmo ACO de Propósito Geral



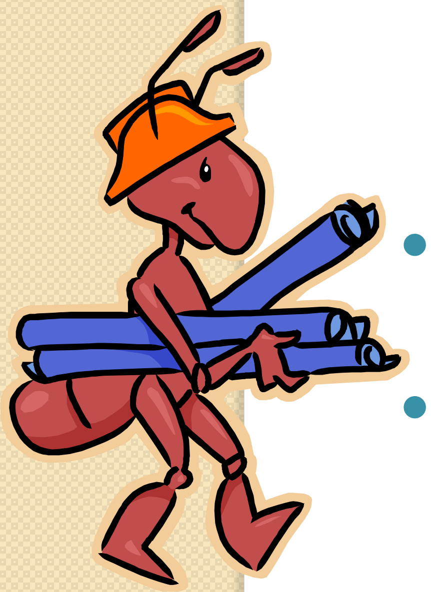
- Características básicas:
  - **Colônia de formigas**, que será usada para construir a solução no grafo.
  - **Regra de transição probabilística**, responsável por determinar o próximo nó do grafo para qual a formiga irá mover-se.
  - **Desejo heurístico**, que irá influenciar a probabilidade da formiga se mover para dado nó.
  - **Nível de feromônio de cada aresta**, que indicará quão boa ela é.

Algoritmo ACO de Propósito Geral

```
procedimento [melhor] = ACO(max_it, N, τ_0)
  inicializar τ_ij   // normalmente inicializados com o mesmo τ_0
  inicializar melhor
  colocar cada formiga k em uma aresta selecionada aleatoriamente
  t ← 1;
  enquanto t ≤ max_it faça
    para i de 1 até N faça      // para cada formiga
      construa uma solução aplicando a regra de transição
        probabilística (e − 1) vezes
      // a regra é função de τ e η (feromônio e desejo heurístico)
      // e é a quantidade de nós no grafo G
    fim-para
    avaliar o custo de cada solução construída
    se uma solução melhorada for encontrada
      então atualizar a melhor solução encontrada
    fim-se
    atualizar trilhas de feromônio
    t ← t + 1
  fim-enquanto
fim-procedimento
```

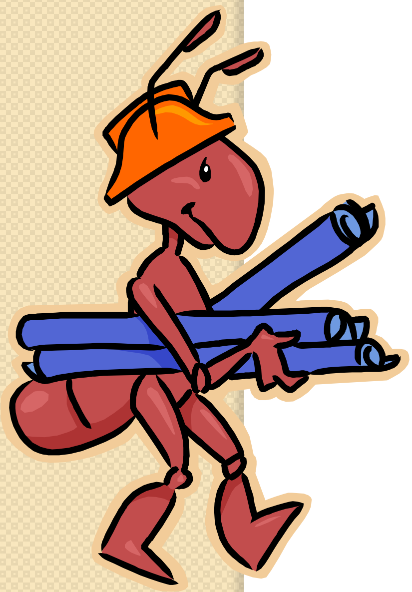
Comportamento do ACO

- Construção de soluções probabilísticas são influenciadas pelas trilhas de feromônio.
    - Sem atualização dos feromônios nas trilhas no caminho para a fonte de alimento.
- Caminho de volta determinístico com eliminação de loops e atualização de feromônio na trilha.
    - Loops também podem ser evitados a priori não revisitando nós que já foram visitados (nos problemas em que sempre há outra opção de nó a ser visitado).
        - Ex.: grafos completos.
- Avaliação da qualidade das soluções geradas.
    - Uso da avaliação para definir quantidade de feromônio a ser depositada.
- Algumas vezes, evaporação de feromônios.



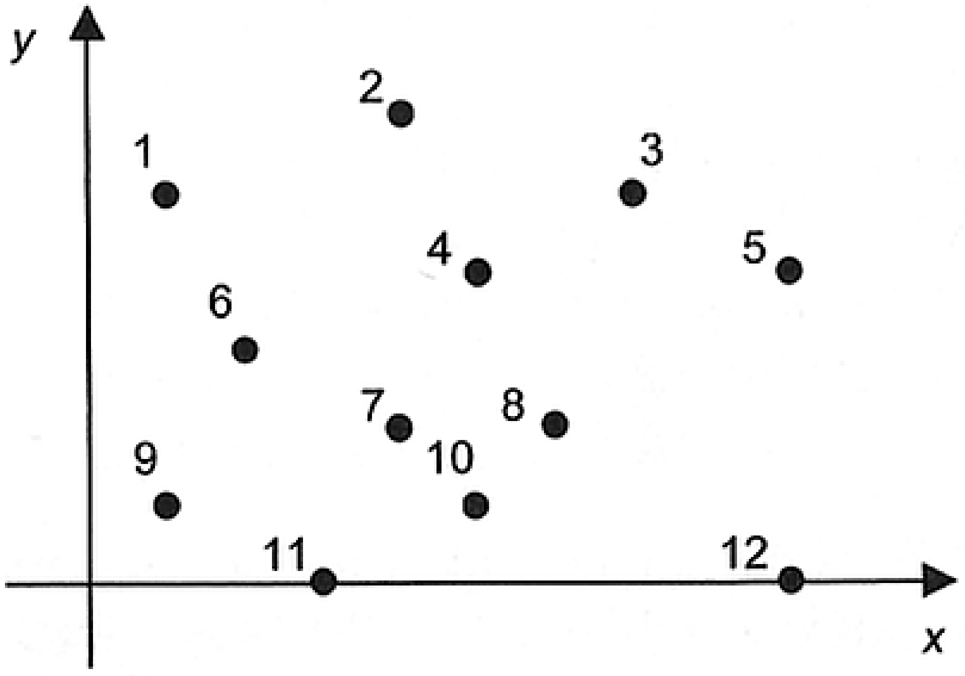
Ant Colony Optimization e TSP

- O problema de encontrar o caminho mais curto do ninho à fonte de alimento é semelhante ao conhecido Problema do Caixeiro Viajante (*Traveling Salesman Problem* – TSP).
  - O viajante deve encontrar a menor rota pela qual visitará um dado número de cidades, passando por cada uma delas uma única vez.
  - O objetivo é minimizar o custo (distância) da viagem.

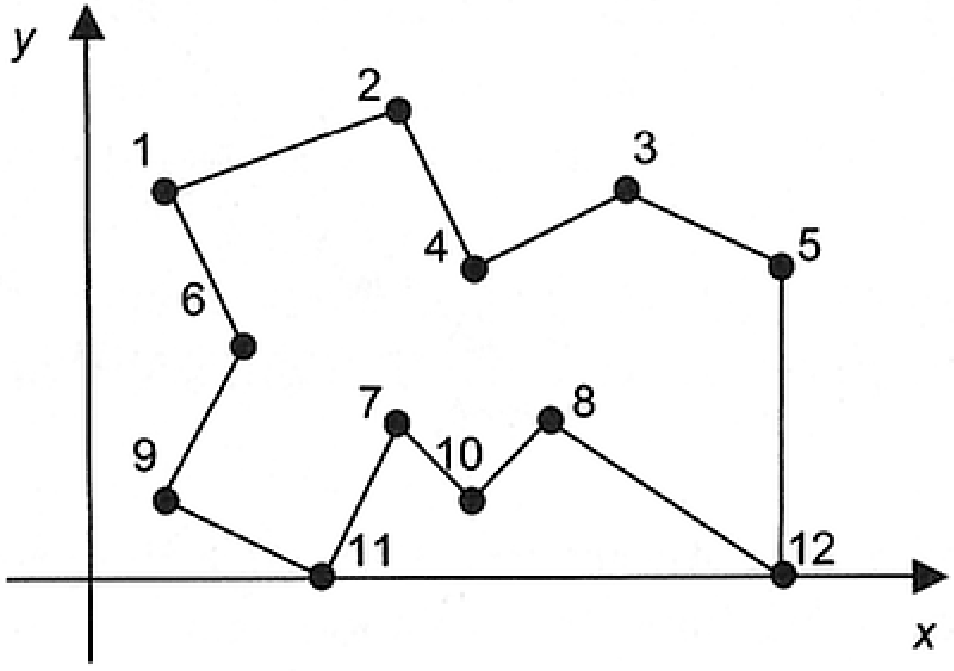


Problema do Caixeiro Viajante (TSP)

a) Um conjunto de 12 cidades.
b) Uma rota mínima conectando as cidades.



(a)



(b)

ACO aplicado ao TSP

- Uma das primeiras tarefas utilizadas para avaliar o ACO.
- Motivações:
  - Problema de caminho mais curto para o qual a metáfora de colônia é facilmente adaptada.
  - Problema NP-Difícil.
  - Didático.
  - Já foi bastante estudado.

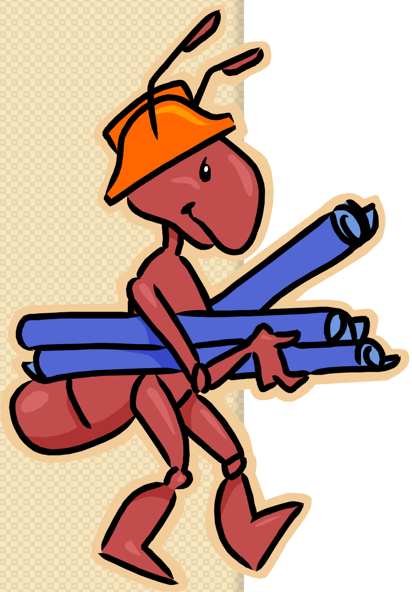
Dorigo, M.; Maniezzo, V.; Colorni, A., "Ant system: optimization by a colony of cooperating agents," *Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics, IEEE Transactions on* , vol.26, no.1, pp.29,41, Feb 1996 doi: 10.1109/3477.484436

ACO aplicado ao TSP

- Cada formiga viaja aleatoriamente de uma cidade a outra, mas favorecendo cidades mais próximas.
  - Desejo heurístico.
- Quando vai de uma cidade a outra, a formiga deposita algum feromônio na trilha.
  - A quantidade de feromônio depositado é inversamente proporcional ao tamanho total da rota.

ACO aplicado ao TSP

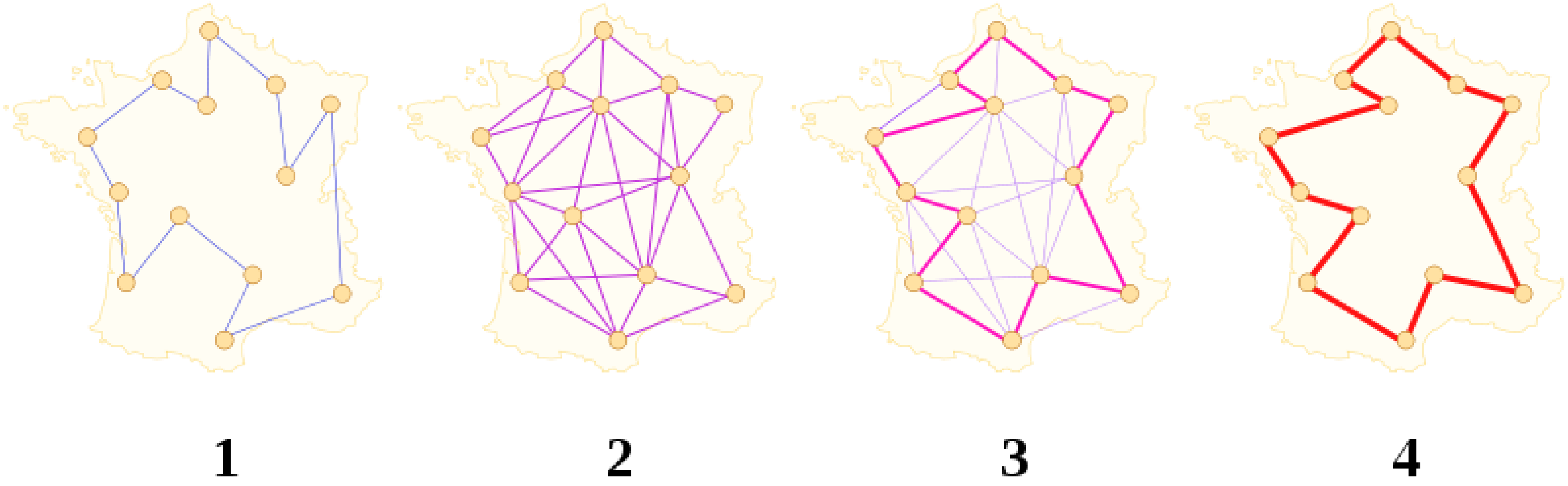
- Depois que todas as formigas completaram suas viagens, os elos que pertencem ao maior número de rotas mais curtas terão mais feromônio depositado.
- Como o feromônio evapora com o tempo, elos de rotas mais longas eventualmente conterão muito menos feromônio que os elos de rotas mais curtas.



ACO aplicado ao TSP

- Rotas menos reforçadas (por feromônio) atrairão menos formigas na próxima viagem.
- Repetindo o processo várias vezes, é possível encontrar progressivamente as rotas mais curtas.

https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Aco_TSP.svg



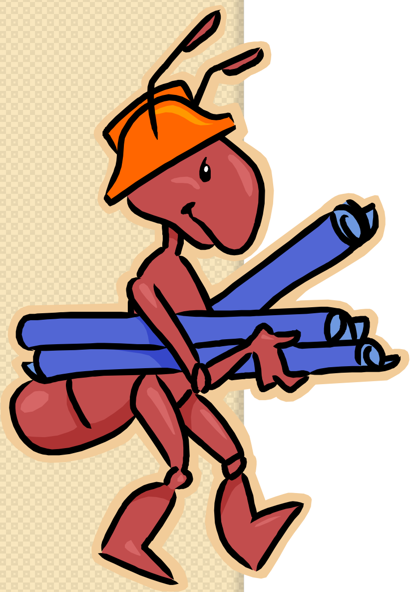
ACO aplicado ao TSP

- O TSP pode ser definido como um grafo $G = (V, E)$, onde as cidades são os nós V e as conexões entre as cidades são as arestas E:
- Seja d_{ij} a distância Euclidiana entre as cidades i e j:

$$d_{ij} = \left[\left(x_i - x_j\right)^2 + \left(y_i - y_j\right)^2\right]^{1/2}$$

x_m e y_m são as coordenadas da cidade m, no plano x−y

Transição entre Cidades



- Para cada formiga, a transição da cidade i para a cidade j na iteração t depende de:
  - A cidade já ter sido visitada ou não.
    - As formigas precisam ter memória para saber as cidades que já visitaram.
      - J_i^k é a lista de cidades que ainda precisam ser visitadas quando a formiga k está na cidade i
  - O inverso da distância d_{ij} entre as cidades, chamado visibilidade $\eta_{ij} = 1/d_{ij}$
  - A quantidade de feromônio τ_{ij} na aresta conectando as cidades i e j

Probabilidades de Visitar cada Cidade

A probabilidade de uma formiga k ir da cidade i para a cidade j é dada pela seguinte regra de transição:

$$p_{ij}^{k}(t) = \begin{cases} \dfrac{\left[\tau_{ij}(t)\right]^{\alpha} . \left[\eta_{ij}\right]^{\beta}}{\sum_{j \in J_i^k} \left[\tau_{ij}(t)\right]^{\alpha} . \left[\eta_{ij}\right]^{\beta}} & \text{se } j \in J_i^k \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde:

- τ_{ij} é o nível de feromônio na aresta (i, j)
- η_{ij} é a visibilidade da cidade j quando a formiga está na cidade i
- J_i^k é a lista de cidades que ainda precisam ser visitadas pela formiga k a partir do nó i
- α e β são pesos definidos pelo usuário.

Feromônio Depositado nas Arestas

Quando atravessa uma aresta a formiga deixa algum feromônio nela. A quantidade $\Delta\tau_{ij}^{k}$ de feromônio colocada na aresta (i, j) pela formiga k depende da seguinte regra:

$$\Delta\tau_{ij}^{k} = \begin{cases} Q/L^{k}(t) & \text{se } (i, j) \in T^{k}(t) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

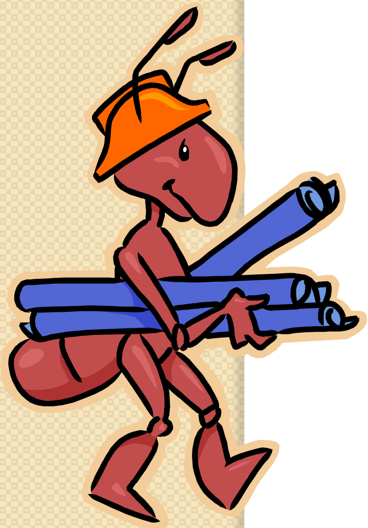
onde $L^{k}(t)$ é o tamanho do caminho $T^{k}(t)$ realizado pela formiga k na iteração t, e Q é outro parâmetro definido pelo usuário.

Regra de Atualização de Feromônio

A regra de atualização de feromônio é dada por:

$$\tau_{ij}(t+1) \leftarrow (1-\rho)\tau_{ij}(t) + \Delta\tau_{ij}(t)$$

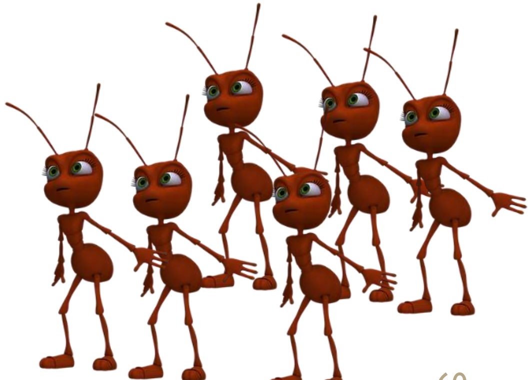
onde $\rho \in (0,1]$ é a taxa de decaimento do feromônio, $\Delta\tau_{ij}(t) = \sum_k \Delta\tau_{ij}^k(t)$, e $k = 1, \dots, N$ é o índice da formiga.



Quantas Formigas?

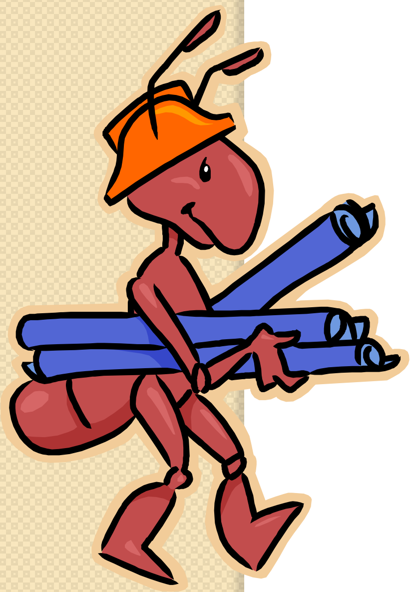
- O número N de formigas é um parâmetro importante do algoritmo.
  - Muitas formigas reforçam caminhos sub-ótimos levando a soluções ruins.
  - Poucas formigas resultam em comportamento cooperativo insuficiente por conta da taxa de decaimento do feromônio.
  - Sugere-se usar $N = e$
    - Número de Formigas = Número de Cidades

Dorigo, M.; Maniezzo, V.; Colorni, A., "Ant system: optimization by a colony of cooperating agents," *Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics, IEEE Transactions on* , vol.26, no.1, pp.29,41, Feb 1996 doi: 10.1109/3477.484436



Formigas Elitistas

- Termo emprestado dos algoritmos evolucionários.
- Formiga elitista reforça as arestas que pertencem à melhor rota encontrada até o momento.
  - Adicionam $b.Q/L_{\text{melhor}}$ ao nível de feromônio destas arestas
    - b é o número de formigas elitistas.
    - L_{melhor} é o tamanho da melhor rota encontrada desde o início da execução.



procedimento $[melhor] = \text{AS–TSP}(\max\_it, \alpha, \beta, \rho, N, e, Q, \tau_0, b)$

  inicializar τ_{ij} // normalmente inicializados com o mesmo τ_0

  colocar cada formiga k em uma cidade selecionada aleatoriamente

  seja *melhor* a melhor rota encontrada desde o início do algoritmo

    e L_{melhor} seu tamanho

  $t \leftarrow 1$;

  enquanto $t \leq \max\_it$ **faça**

    para i de 1 até N **faça** // para cada formiga

      // e é o número de cidades no grafo

      construa uma rota $T^k(t)$ aplicando o seguinte passo $(e-1)$ vezes:

      na cidade i, escolha a próxima cidade j com probabilidades $p_{ij}^k(t)$

    fim-para

    avaliar o tamanho da rota construída por cada formiga

    se uma rota mais curta for encontrada

      então atualizar *melhor* e L_{melhor}

    fim-se

    para cada aresta **faça**

      Atualizar as trilha de feromônio aplicando a seguinte regra:

$$\tau_{ij}(t+1) \leftarrow (1-\rho)\tau_{ij}(t) + \Delta\tau_{ij}(t) + b.\Delta\tau_{ij}^b(t), \text{ onde}$$

$$\Delta\tau_{ij}(t) = \textstyle\sum_k \Delta\tau_{ij}^k(t), \quad k = 1, \ldots, N;$$

$$\Delta\tau_{ij}^k = \begin{cases} Q/L^k(t) & \text{se } (i,j) \in T^k(t) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}, \text{ e}$$

$$\Delta\tau_{ij}^b = \begin{cases} Q/L_{melhor} & \text{se } (i,j) \in melhor \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

    fim-para

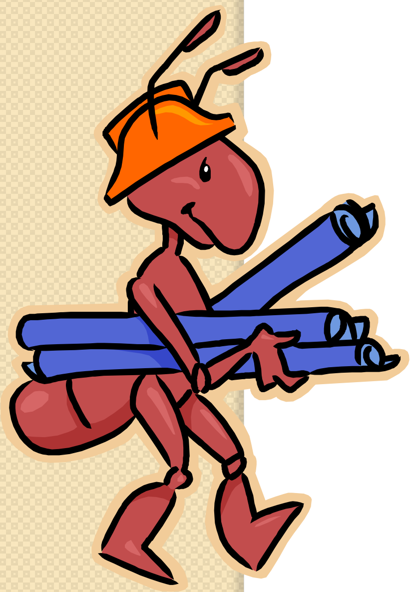
    $t \leftarrow t + 1$

  fim-enquanto

fim-procedimento

Parâmetros no ACO aplicado ao TSP

- Parâmetros utilizados pelos autores:
  - $\alpha = 1$
  - $\beta = 5$
  - $\rho = 0,5$
  - $N = e$
  - $Q = 100$
  - $\tau_0 = 10^{-6}$
  - $b = 5$



Influência dos Parâmetros no Desempenho

- **α (influência do feromônio):**
  - α alto → explora trilhas com maior concentração de feromônio (exploração intensiva).
  - α baixo → reduz peso do histórico, aumenta aleatoriedade.
- **β (influência heurística):**
  - β alto → prioriza informações locais (heurística, ex.: inverso da distância).
  - β baixo → efeito heurístico reduzido.
- **ρ (taxa de evaporação):**
  - ρ alto → rápida perda de feromônio, evita convergência prematura, mantém diversidade.
  - ρ baixo → feromônio persiste, risco de aprisionamento em soluções locais.
- **N (número de formigas):**
  - N grande → melhor cobertura de busca, porém maior custo computacional.
  - N pequeno → mais rápido, mas menos diversificado.
  - Como visto anteriormente, N muito grande ou muito pequeno pode levar para convergência em caminhos sub-ótimos.

Outras Melhorias do ACO

- Esta versão apresentada (Dorigo et al., 1996) funciona bem para o TSP com poucas cidades.
  - O desempenho cai com uma grande quantidade de cidades.
  - Os autores melhoraram o modelo posteriormente (Dorigo et al., 1997).
    - Mudanças nas regras de transição, regras locais de atualização de trilhas de feromônio, lista restrita de cidades candidatas para próxima visita, etc.
  - Outras melhorias, variações, e aplicações foram e ainda vem sendo apresentadas.

Dorigo M., Maniezzo V., Colorni A. (1996) Ant system: optimization by a colony of cooperating agents, in *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, vol. 26, no. 1, pp. 29-41, Feb., doi: 10.1109/3477.484436.

Dorigo M., Gambardella L. M. (1997), Ant colonies for the travelling salesman problem, *Biosystems*, Volume 43, Issue 2, July, Pages 73-81, ISSN 0303-2647, http://dx.doi.org/10.1016/S0303-2647(97)01708-5.

Dorigo, M., & Stützle, T. (2004). *Ant Colony Optimization*. Bradford Books.

Blum, C. (2005). Ant colony optimization: Introduction and recent trends. *Physics of Life reviews*, *2*(4), 353-373.

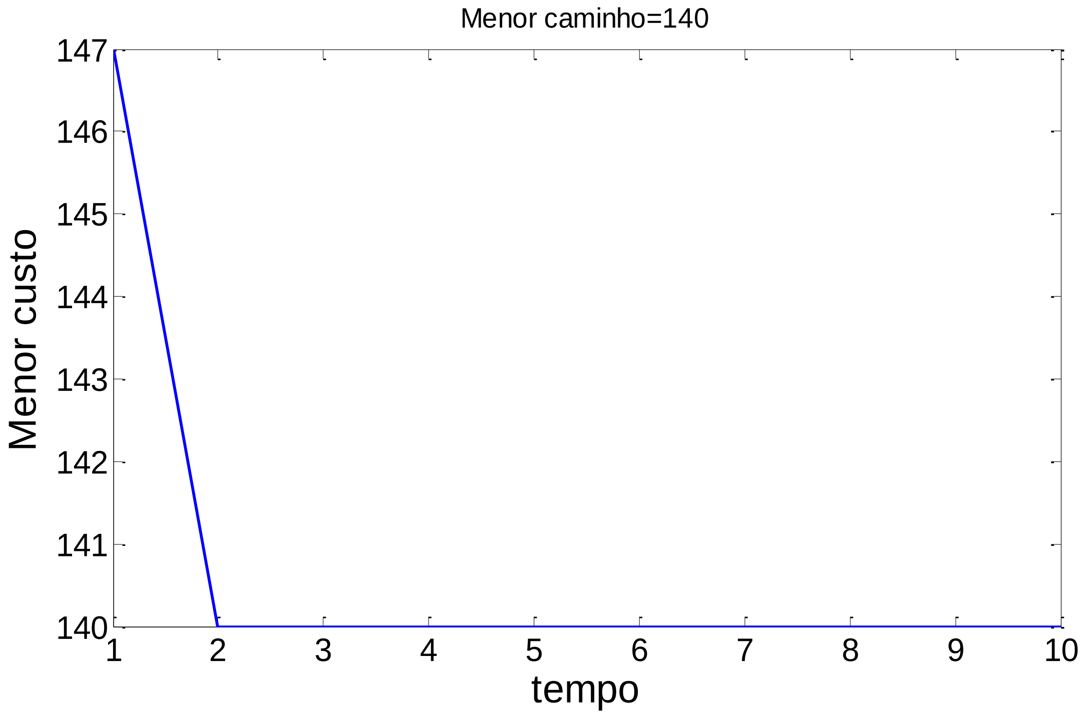
Dorigo, M., Birattari, M., & Stutzle, T. (2006). Ant colony optimization. *IEEE computational intelligence magazine*, *1*(4), 28-39.

Dorigo, M., & Stützle, T. (2019). Ant colony optimization: overview and recent advances. *Handbook of metaheuristics*, 311-351.

TSP com 8 Cidades e 8 Formigas

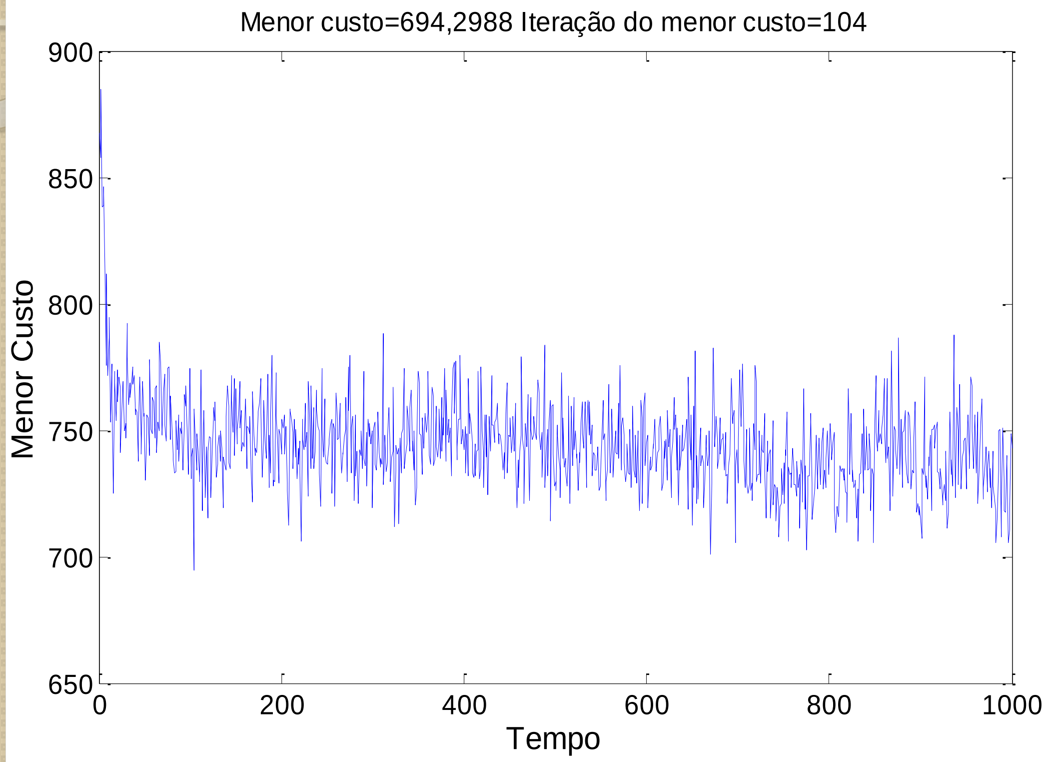
Distância entre cidades

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	0	42	61	30	17	82	31	11
B	42	0	14	87	28	70	19	33
C	61	14	0	20	81	21	8	29
D	30	87	20	0	34	33	91	10
E	17	28	81	34	0	41	34	82
F	82	70	21	33	41	0	19	32
G	31	19	8	91	34	19	0	59
H	11	33	29	10	82	32	59	0

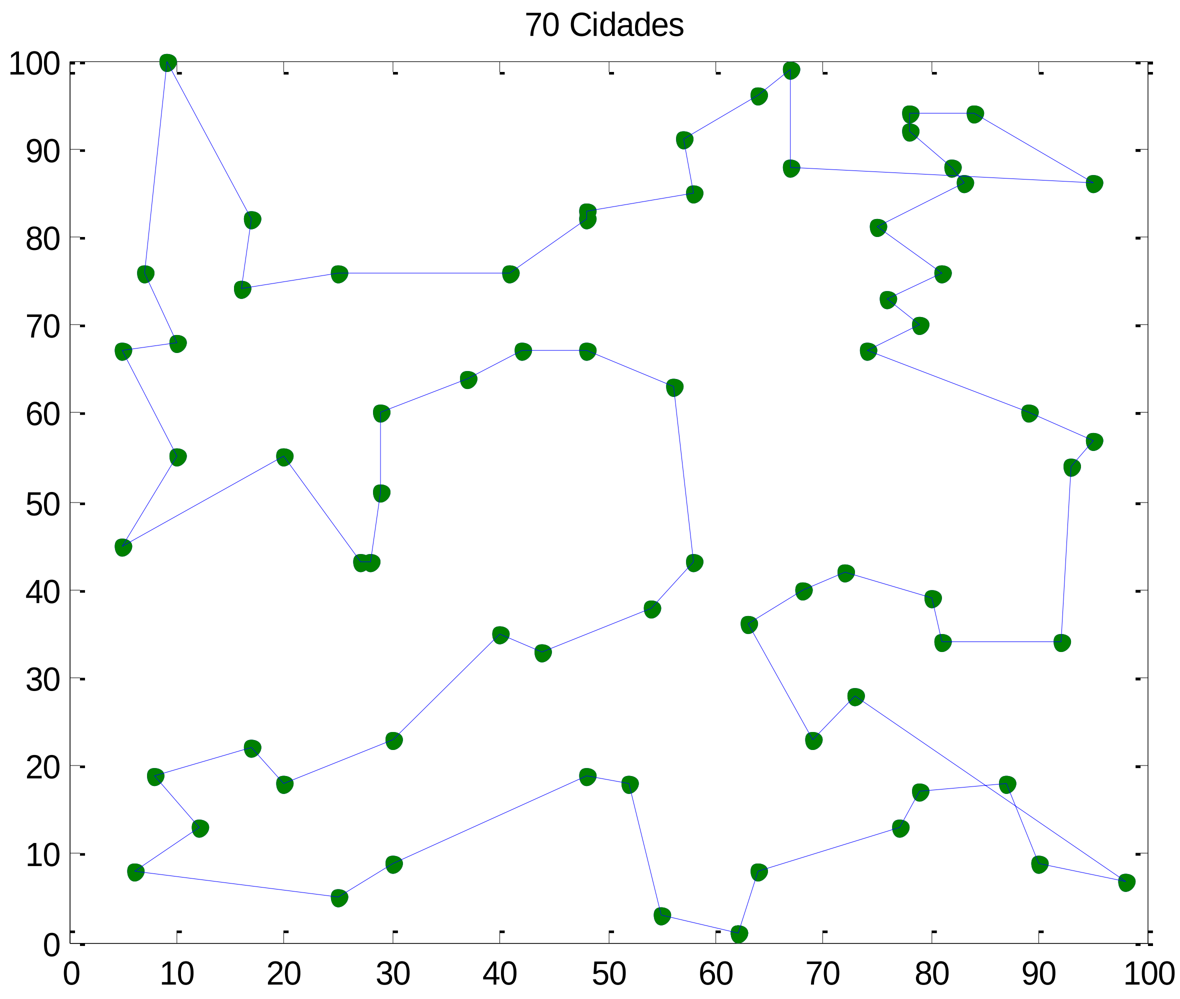


Variação da maior aptidão dos elementos da população em cada iteração para o problema do caixeiro viajante com 8 cidades utilizando Otimização por colônia de formigas (ACO)

TSP com 70 Cidades e 70 Formigas



Variação da maior aptidão dos elementos da população em cada iteração para o problema do caixeiro viajante com 70 cidades utilizando Otimização por colônia de formigas (ACO)



Problema TSP com 70 cidades e o melhor caminho obtido por Otimização por Colônia de Formigas (ACO)

Outras aplicações de ACO

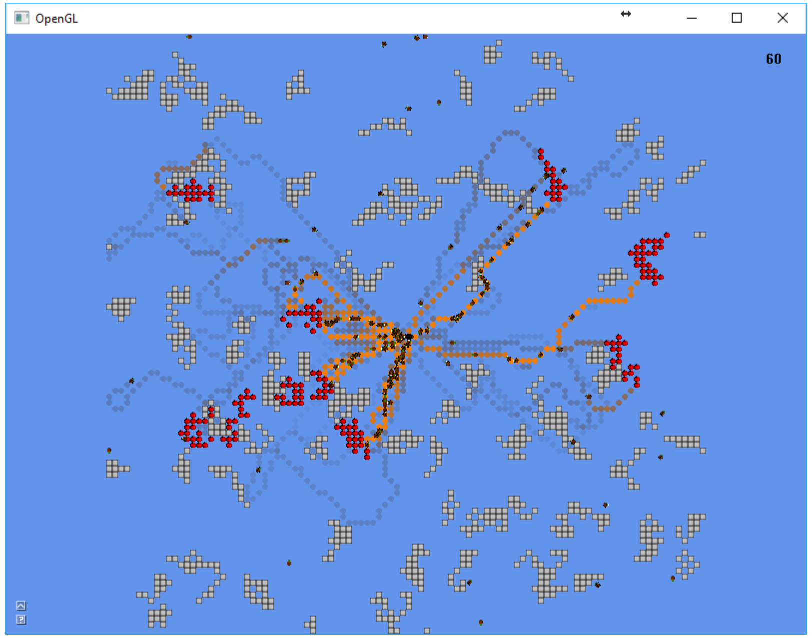
- Roteamento de veículos
- Roteamento em redes
- Colorização de gráficos
- Supersequência mais curta comum
- Problema de atribuição quadrática
- Agendamento em máquinas
- Problema da mochila múltipla
- Atribuição de frequência
- Ordenamento sequencial

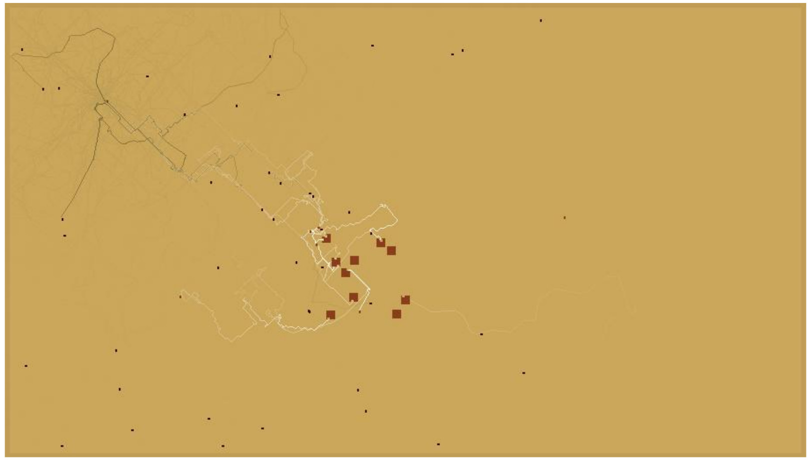
Aplicações de ACO

- Algoritmos ACO são adequados para:
  - Problemas que envolvam busca em grafos.
    - Principalmente problemas de custo mínimo.
  - Problemas NP.
  - Problemas de Otimização Combinatória Estática e Dinâmica.
    - Estática: características do problema não mudam com o tempo (exemplo: TSP).
    - Dinâmica: características do problema mudam com o tempo (exemplo: roteamento de redes).
  - Problemas Distribuídos.
    - Arquitetura computacional distribuída.
      - Processamento paralelo ou em rede.
      - Conjunto de agentes cooperando para encontrar soluções úteis.

Simuladores Interessantes: Colônias de Formigas

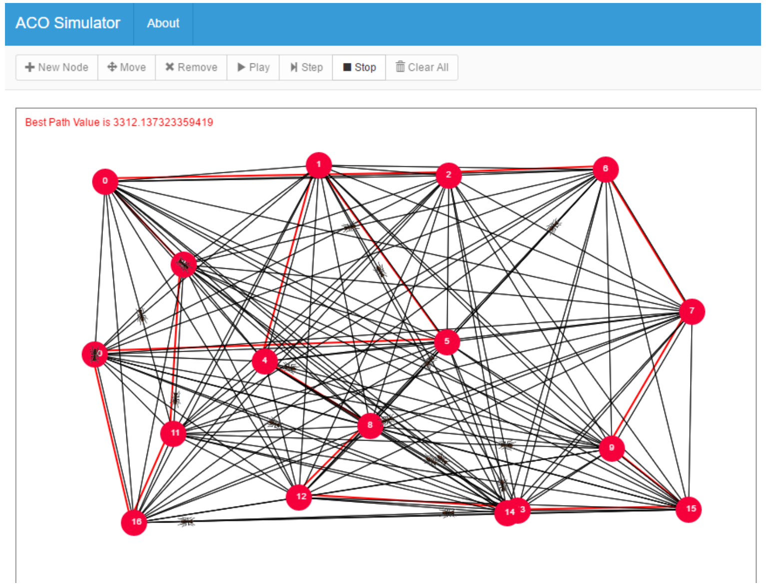
- https://web.archive.org/web/20201202122430/http://alexbelezjaks.com/works/ant-colony-simulation/
- http://www.openprocessing.org/sketch/15109

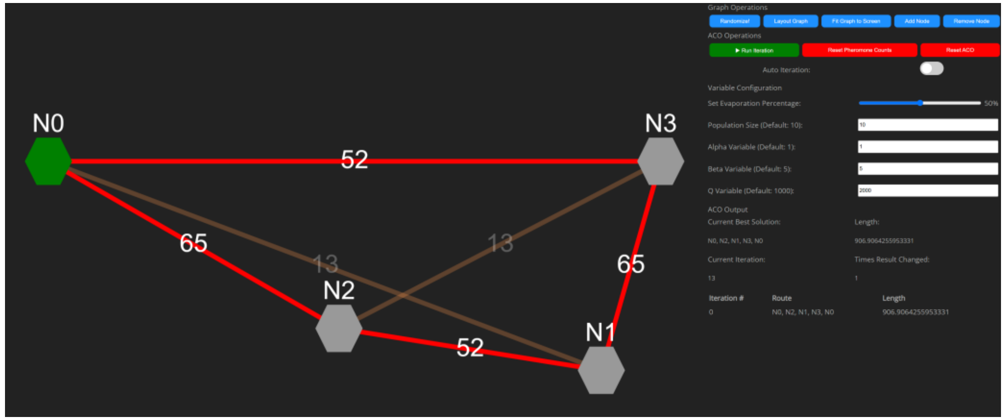


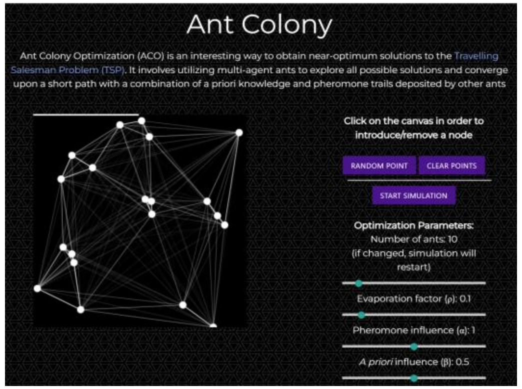


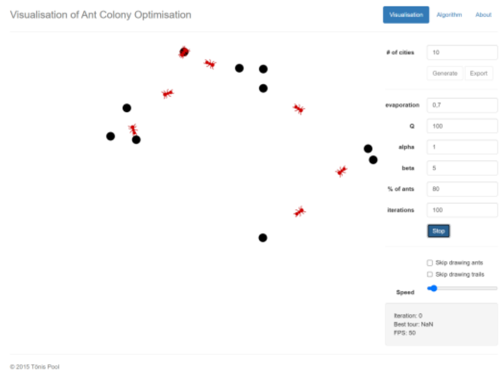
Simuladores Interessantes: ACO

- http://thiagodnf.github.io/aco-simulator/
- https://visualize-it.github.io/ant_colony_optimization/simulation.html
- https://poolik.github.io/visual-aco/#/visualisation
- https://cbussuol.github.io/aco-visualizer/









Próxima Aula: Competição e Cooperação entre Partículas

- Introdução
  - Aprendizado de Máquina
  - Aprendizado Semi-Supervisionado
  - Modelos Baseados em Grafos
- Competição e Cooperação entre Partículas em Redes
  - Motivações
  - Descrição do Modelo
  - Exemplo
  - Resultados
- Extensões do Modelo
  - Detecção de Comunidades Sobrepostas
  - Aprendizado Semi-Supervisionado com Dados Imperfeitos
  - Classificação Semi-Supervisionada de Fluxos de Dados
  - Aprendizado Ativo e Semi-Supervisionado
  - Segmentação Interativa de Imagens
- Novas Aplicações
- Conclusões

Bibliografia

- CASTRO, Leandro Nunes. *Fundamentals of Natural Computing: Basic Concepts, Algorithms, And Applications*. CRC Press, 2006.
- CARVALHO, André Ponce de Leon F. de. *Notas de Aula*, 2007.
- BROWNLEE, Jason. *Clever Algorithms: Nature-Inspired Programming Recipes*. Jason Brownlee, 2011.
- BONABEAU, Eric; DORIGO, Marco; THERAULAZ, Guy. *Swarm Intelligence: From Natural to Artificial Systems*. Oxford University Press, 1999.
- DORIGO, Marco; STÜTZLE, Thomas. *Ant Colony Optimization*. Bradford Books, 2004.
- BREVE, Fabricio; ZHAO, Liang; QUILES, Marcos G.; PEDRYCZ, Witold; LIU, Jimming. **Particle competition and cooperation in networks for semi-supervised learning**. *Knowledge and Data Engineering, IEEE Transactions on*, 2012.
- BREVE, Fabricio Aparecido. *Aprendizado de Máquina em Redes Complexas*. 165 páginas. Tese. São Carlos: Universidade de São Paulo, 2010.